Ленинградский Политехникум Путей Сообщения
имени тов. Дзержинского.

И. Давыдов.

# СБОРНИК ЗАДАЧ
# ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

## С РЕШЕНИЯМИ И ЧЕРТЕЖАМИ В ТЕКСТЕ

с приложением таблиц основных формул.

**Часть I.**

1. Аналитическая геометрия.
2. Дифференциальное исчисление.
3. Приложение дифференц. исчисления к геометрии.
4. Интегрирование функций.



ЛЕНИНГРАД.

Ленинградский Гублит № 7723. Тираж 300 экз.
Международный, 17.

## От составителя.

В настоящий сборник вошли главным образом задачи, разбираемые на практических занятиях в Индустриальном Техникуме. К целому ряду задач даны указания на методы решения. Цель сборника - облегчить учащимся практическое усвоение курса.

При составлении руководствовался следующими сочинениями, откуда заимствованы многие упражнения:

1. Бертран. Дифференц. исчисление, СПБ. 1911
2. Тодгентер. Задачник по аналит. геометрии.
3. Андреев. Сборник упражн. по аналит. геометрии
4. Brahy. Exercices Méthodiques.
5. Граве. Аналитическая геометрия.
6. Адамов. Интегрир. функций (Записки, сост. Давидов
7. Сборник задач по высш. мат. Изд. Инст. Инж. Пут. Сооб
8. Vogt. Elements de Mathématiques Supérieures, Paris, 19

12/XI 23

# Аналитическая Геометрия.

## I. Координаты и уравнения.

1. Найти на оси абсцисс точку, находящуюся н[а] равных расстояниях от начала координат и от точ[ки] (-3,5).

2. Относительно косоугольной системы расстояни[е] между точками (2,1) и (1,2) равно единице. Найти уго[л] между осями.

3. Расстояние между точками $(x,5)$ и $(-2,y)$ делит[ся] в точке (1,1) пополам. Найти эти точки.

4. Вершины треугольника суть: (5,0), (2,-7) и (0,0). Найти точки, в которых медианы делятся на три равные части.

5. Некоторая линия выражается ур-ием: $y^2 - y - x =$ Как напишется ур-ие этой линии в новой системе коо[р]динат, оси которой ||ны прежним, а начало находится в точке $(-3\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$.

6. Между координатами $x$ и $y$ существует зависи[]мость $x^2 + y^2 = 1$. Как выразится та же зависимость, ес[ли] оси повернуть на угол $\varphi$.

7. Полярные координаты точки: $r=3$ и $\varphi=60°$. Найти прямоугольные координаты этой точки, начало коих в точке $(r=1, \varphi=45°)$, а ось абсцисс $\perp$-на к полярной оси.

8. Найти расстояние между точками $(r=2, \varphi=175°)$ $(r=3, \varphi=-65°)$.

9. Что выражают ур-ия:

а) $x^2+y^2=0$ б) $x^2-y^2=0$

в) $x^2+xy=0$ г) $xy=0$

д) $x^2-y^2-a^2=0$ е) $x(y-a)=0$

ж) $x^3-y^3-(x-y)(xy+1)=0$.

10. Отнести прямую $x-y=0$ к новым осям $\parallel$-ым прежним, с началом в точке $(1,2)$.

11. Ту же прямую отнести к новым осям, составляющим $\angle 45°$ с прежними, не меняя начала.

12. По координатам вершин $\Delta$-ка $(2,0)(-2,1)(0,1)$ найти его площадь.

13. Показать, что ур-ия:

$$r=a\cos\varphi,\ r=a+\frac{b}{\cos\varphi},\ r=a(1+\cos\varphi),\ r^2=a^2\cos 2\varphi$$

выражают алгебраические линии.

## II. Прямая линия.

14. Найти углы, образованные с осями координат прямою $y=2x+1$. $(\theta=120°)$

15. Найти ур-ие прямой, проходящей через точку $(1,0)$ и составляющей $\angle 60°$ с прямою $x+y\sqrt{3}=1$.

16. Уравнения сторон $\Delta$-ка

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,\ x=0,\ y=0$$

написать уравнения медиан.

17. Найти прямую, проходящую через точку пересечения прямых $x+y+6=0$ и $2x-y-3=0$ и делающую рав-

ные отрезки на осях.

18. Найти прямую, образующую ∠45° с прямою $3x+y-2=0$ и проходящую через пересечение этой прям[...] с осью OY.

19. Найти расстояние между двумя параллельными прямыми $3x+2y-5=0$, $6x+4y+7=0$

20. Найти длину ⊥-ра, опущенного из точки (2,5) на прямую $5x+2y+6=0$. ($\theta=120°$)

21. Две ⊥-ные прямые выражаются ур-ями: $2x+3y=0$ и $4x-y=0$. Найти θ.

22. Найти на оси абсцисс точку, находящуюся на расстоянии 3 от прямой $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$. ($\theta=60°$)

23. Даны 2 прямые $2x-3y=0$ и $2x_1-3y_1=0$. Оси 2^ой^ системы составляют ∠45° с осями 1^ой^ системы. Найти угол между прямыми.

24. Длина ⊥, опущенного из точки (1,-1) на прямую $x+2y+5=0$ равна 2. Найти θ.

25. Катеты прямоугольного тр-ка равны $a$ и $b$. Принимая их за оси координат, найти длины ⊥⊥-ов, опущенных из вершин на медианы.

26. Найти ур-ия биссектрисс углов, образуемых прямыми $3x+4y-9=0$, $12x+5y-3=0$

27. Даны прямые

$$r\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)=2a, \quad r\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{6}\right)=a$$

Найти полярные координаты точки их пересечения и угол между ними.

28. Даны прямые

$$\frac{1}{r}=4\cos\varphi+3\sin\varphi\ ; \quad \frac{1}{r}=3\cos\varphi-4\sin\varphi$$

Найти угол между ними.

29. Что выражает уравнение

$$3x^2-4xy+y^2=0$$

и если совокупность 2^х прямых - найти угол между ними.

30. То же, рассмотрев ур-ие:

$$x^2-5xy+6y^2=0$$

31. Что выражает ур-ие:

$$x^2-2xy\sec\varphi-y^2=0$$

32. Что выражает ур-ие:

$$x^2-2xy\,tg\,\varphi+y^2=0$$

33. Найти углы, образованные парой прямых

$$x^2-2\sqrt{2}\,xy+y^2=0$$

34. То же.., $x^2+xy-6y^2=0$

35. Уравнение:

$$x^2+4xy+4y^2+x-2y-2=0$$

выражает совокупность прямых. Найти ур-ие каждой из них.

36. То же

$$3y^2-8xy-3x^2+30x-27=0.$$

Показать, что прямые эти $\perp$ ны.

37. То же.., $x^2-xy+y^2-x-y+1=0$

38. То же.., $x^3-6x^2y-11xy^2-6y^3=0$

## III Кривые 2^го порядка.

39. Составить ур-ие линии 2^го порядка, проходящей через точки $(0,0)$, $(0,1)$, $(2,-5)$ и $(-5,2)$.

40. Найти точки пересечения кривой

$$2x^2-5xy+3y^2-6x-6y+3=0$$

с осями и биссектрисами координатных углов.

41. Найти длину хорды, образуемой прямою $y=2x+1$ с кривою $3x^2-2xy+4y^2+x-1=0$

42. Найти асимптоты кривой:

$$2x^2-3xy-x+3y+4=0$$

43. Найти кривую, проходящую через точки (0,0), (0,1), (1,0) и имеющую центр в точке (2,3)

44. Найти центр и два сопряженных диаметра кривой $x^2-3xy+5y^2+2x-3y-5=0$, из коих один ‖ прямой $x-2y+4=0$.

45. Найти сопряженные диаметры, совпадающие, кривой $xy+y^2+x=0$

46. Найти ур-ие кривой, проходящей через точку (1,1), если ее сопряженные диаметры:

$$2x-3y=0 \quad и \quad x+2y=0;$$

$$x-y=0 \quad и \quad 3x-5y=0$$

47. Найти оси кривой

$$y=\frac{1}{x-a}$$

48. Показать, что прямая $7x+y+6=0$ проходит через центры кривых

$$3x^2-7xy-6y^2+3x-9y+5=0$$

$$3x^2-5xy+6y^2+11x-17y+13=0$$

49. Что выражают ур-ия:

$$x^2-6xy+9y^2-3x+9y+2=0$$

$$x^2+y^2-2x+1=0$$

$$x^2+2xy+3y^2+2x+4y+2=0$$

50. Упростить ур-ие

$$14x^2-4xy+11y^2=60.$$

51. Найти ур-ие диаметра, общего для кривых:

$$(x-y)^2+2Dx+2Ey+F=0$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

52. Показать, что два сопряженные диаметра, совпадающие, образуют ассимптоту.

53. Найти ур-ие круга, касающегося осей коорди-

ат на расстоянии $a$ от начала.

54. Найти длину ⊥, опущенного из центра круга

$$2x^2+2y^2-5x-7y+9=0$$

а прямую $x-y+1=0$.

55. Какой угол составляют оси координат, относитель-
о которых уравнение

$$x^2+y^2-xy=1$$

ыражает круг.

56. Найти ур-ие круга, проходящего через начало
оординат и точки пересечения их с прямою

$$\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1$$

57. Найти ур-ие круга, описанного около тр-ка,
коего стороны $x+y=0$, $x-y=0$ и $2x+3y=5$.

58. Найти длины 2 сопряженных диаметров эллипса $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{3}=1$, если они составляют между собою угол
120°.

59. Для эллипса $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{3}=1$ найти длину диаметра,
овпадающего с диагональю прямоугольника, построенного
на его осях.

60. Дан эллипс

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$$

Найти точки на нем, коих ординаты равны ±1, а также отрезки, отсекаемые на малой оси прямыми, соединяющими эти точки с концами большой оси.

61. Чему равен эксцентриситет эллипса, для которого расстояние между фокусами = расстоянию между концами большой и малой оси.

62. Расстояние между фокусами эллипса равно 2,
между директриссами 10. Найти длины полуосей.

63. Найти эксцентриситет эллипса, если малая ось
видна из фокуса под прямым углом.

64. Расстояние между директрисами эллипса = 36 метров. Найти длины осей, зная, что радиусы векторы некоторой точки его равны 9 и 15 метрам.

65. Найти эксцентриситет эллипса, для которого расстояние между фокусами есть средняя геометрическая 2<sup>х</sup> его осей.

66. Показать, что кривая

$$r = \frac{3}{2+\cos\varphi}$$

есть эллипс, с осями 2 и $\sqrt{3}$.

67. Оси эллипса 18 и 4, найти длины двух сопряженных диаметров, образующих угол в 150°.

68. Найти угол между 2-мя равными сопряженными диаметрами эллипса

$$\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1.$$

69. Чему равен эксцентриситет эллипса, для которого расстояние между фокусами равно диаметру, равному со своим сопряженным.

70. Найти на гиперболе

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{36} = 1$$

такую точку, чтобы расстояние ее от двух ассимптот относились как 9:4.

71. Дан эллипс

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{5} = 1$$

Найти уравнение гиперболы, вершины которой находятся в фокусах, а фокусы в вершинах данного эллипса.

72. Показать, что между эксцентриситетами двух сопряженных гипербол имеется соотношение:

$$\frac{1}{e^2} + \frac{1}{e_1^2} = 1$$

73. Дана гипербола

$$x^2 - y^2 = 8.$$

Найти софокусные с нею эллипс и гиперболу, проходящие

через точку (4, 6).

74. Показать, что ур-ие
$$r=\frac{3}{1+2\cos\varphi}$$
выражает гиперболу, ассимптоты которой наклонены под углом в 60° к действительной оси.

75. Найти угол между двумя сопряженными диаметрами гиперболы
$$\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{9}=1,$$
если действительный из этих диаметров втрое больше действительной оси.

76. Какую линию выражает ур-ие
$$r=\frac{5}{2+2\cos\varphi}.$$
Представить его в простейшем виде относительно прямоугольной системы координат.

77. Дана парабола $y^2=2px$. Найти хорду, ⊥-ую к оси OX, чтобы длина этой хорды была равна расстоянию ее от фокуса.

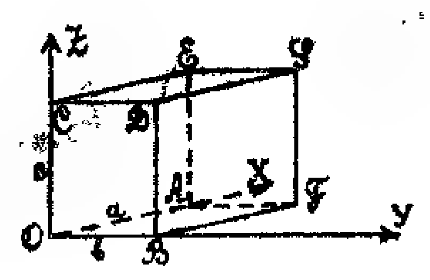
78. Из вершины параболы $y^2=2px$ описан круг. При какой величине радиуса общая хорда обеих кривых находится на равном расстоянии от фокуса и вершины параболы.

79. Эллипс и парабола даны ур-ями:
$$y^2=18x-0{,}36x^2\ ;\ y^2=18x$$
Найти расстояния фокусов эллипса от фокуса параболы.

## IV Геометрия в пространстве.

### а) Плоскость.

Дан параллелопипед AD (см. черт. на след. стр.). При обозначениях, указанных на чертеже написать уравнения




плоскостей, проходящих через точки

80. D, E и F.

81. G, A и B.

82. G, O и A.

83. G, O и B.

84. Найти длину ⊥, опущенного из начала координат на плоскость в задаче 80.

85. То же, из точки C на плоскость в задаче 81.

86. Найти угол между плоскостями в задаче 82 и 83.

87. То же, между плоскостями в задаче 80 и 81.

88. Найти плоскость, проходящую через точку $(2, 6, -5)$ и ось $OX$.

89. Найти угол между плоскостями

$$9x+20y-12z=0 \quad \text{и} \quad 8x+6y-5=0.$$

90. Найти длину перпендикуляра, опущенного на плоскость $4x-3y+12z-13=0$ из точки $(3, 8, 1)$.

91. Найти угол между двумя плоскостями, проходящими через $OX$, $OZ$ и общую точку $(1, 2, 4)$.

92. Дана плоскость $3x-4y+5z+1=0$. Найти cos'ы углов, образуемых ⊥-ом, опущенным из начала, с осями.

93. Составить ур-ие плоскости, проходящей через пересечение плоскостей $2x-y+3z-2=0$; $y-z+4=0$ и точку $(1, 0, 2)$.

94. То же, через пересечение плоскостей

$$x-y+4=0 \quad \text{и} \quad 2x-3y+5z=0$$

перпендикулярно к плоскости $x+y+z-4=0$.

## б) Прямая линия.

95. Составить ур-ие прямой $OG$ (см. черт. на пред. стр.)

96. Составить ур-ия прямых $EB$ и $AD$.

97. Найти угол между прямою $OG$ и плоскостью в задаче 80.

98. Найти угол между прямыми в задаче 96.

99. Составить ур-ие прямой, проходящей через точку $O$ и середину грани $AEGF$

100. Найти угол между прямыми

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{\sqrt{3}}&=y\\ z&=0\end{aligned}\right\} \quad \text{и} \quad \frac{x}{2}=\frac{y}{\sqrt{3}}=\frac{z}{\sqrt{2}}$$

101. Найти прямую, проходящую через точку $(1,0,1)$ и пересекающую прямую

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{4}$$

под углом в $90^\circ$.

102. Что выражает ур-ие $x^2=y^2=z^2$

103. Что выражают ур-ия:

$$\frac{x^3+1}{x+1}=\frac{y^3+1}{y+1}=\frac{z^3+1}{z+1}$$

# Дифференциальное Исчисление.

## I. Вычисление пределов.

1. $\left.\frac{\sin x}{x}\right|_{x=0}$

2. $\left.\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}\right|_{n=\infty}$

3. $\left.\frac{\log(1+x)}{x}\right|_{x=0}$

4. $\left.\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right|_{x=0}$

5. $\left.\frac{a^{x}-1}{x}\right|_{x=0}$

6. $\left.\frac{\sin 2x}{\sin 3x}\right|_{x=0}$

7. $\left.\frac{1-\cos x}{x^{2}}\right|_{x=0}$

8. $\left.\frac{x-\sin x}{x+\sin x}\right|_{x=\infty}$

9. $\left.\frac{e^{\frac{a}{x}}}{e^{\frac{b}{x}}}\right|_{x=0}$ ; $a>0$; $b>0$.

10. $\left.\frac{(x^{3}+1)^{3}-8}{x-1}\right|_{x=1}$

11. $\left.\frac{1+\sqrt{1+4x^{2}}}{x}\right|_{x=\infty}$

12. $\left.x\sin\frac{a}{x}\right|_{x=\infty}$

13. $\left.\operatorname{cosec} x-\operatorname{cotg} x\right|_{x=0}$

14. $\left.\frac{x^{-1}}{\operatorname{cotg} x}\right|_{x=0}$

15. $\left.\frac{x}{\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x}\right|_{x=0}$

16. $\left.\operatorname{tg} 2x\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right|_{x=\frac{\pi}{4}}$

17. $\left.\frac{1-\sin x}{\pi-2x}\right|_{x=\frac{\pi}{2}}$

18. $\left.\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\right|_{x=0}$

19. $\left|\frac{\sin(x^\circ)}{x}\right|_{x=0}$ 20. $\left|\frac{\operatorname{sh} x}{x}\right|_{x=0}$

21. $\left|\frac{\operatorname{th} x}{x}\right|_{x=0}$ 22. $\left|\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right|_{x=\infty}$

23. $\left|\sqrt{x(x+a)}-x\right|_{x=\infty}$ 24. $\left|\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right|_{x=\infty}$

25 $\left|\frac{\lg(1-x)}{x}\right|_{x=0}$ 26. $\left|\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{\sin x}{\operatorname{arctg}\frac{x}{1+x^2}}\right|_{x=0}$

27. $\left|(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}\right|_{x=1}$ 28. $\left|\frac{\sin x-\cos x}{1-\operatorname{tg} x}\right|_{x=\frac{\pi}{4}}$

29. $\left|\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\sin^3 x}\right|_{x=0}$ 30. $\left|\frac{1-\sqrt{1-\sin^3 x}}{x^3}\right|_{x=0}$

31. $\left|\frac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin nx-\cos nx}\right|_{x=0}$ 32. $\left|\frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}\right|_{n=\infty}$

33. $\left|\frac{1+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^3}\right|_{n=\infty}$ 34. $\left|\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdot\cos\frac{x}{2^3}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\right|_{n=\infty}=\frac{\sin x}{x}$

35. $\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{2}+\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2^2}}{2^2}+\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2^3}}{2^3}+\ldots+\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}}{2^n}\right|_{n=\infty}=\frac{1}{x}-\frac{1}{\operatorname{tg} x}$

36. $\left|\cos^m\frac{x}{\sqrt{m}}\right|_{m=\infty}$

37. $\left|\frac{1-\cos^m ax}{\operatorname{tg}^2 bx}\right|_{x=0}$

## II. Функции одной независимой переменной.

Найти производные функций.

1. $y=\frac{1-\cos x}{\sin x}$ 2. $y=\frac{1+\sin x}{\cos x}$

3. $y=\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2}$ 4. $y=\sqrt{1-\sin 2x}$

5. $y=\sqrt{1+\sin 2x}$ 6. $y=\log 2x+\lg\frac{x}{2}$

7. $y = \log 3x + \log \frac{3}{x}$

8. $y = \log(\log^2 x)$

9. $y = \log\cos x + \log \operatorname{tg} x$

10. $y = x^x$

11. $y = \log_x a$

12. $y = \log_{\sin x} a$

13. $y = \log_{\sqrt{x}} a$

14. $y = \log \sin x$

15. $y = \log \cos x$

16. $y = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$

17. $y = \sin(\log x)$

18. $y = \cos(\log x)$

19. $y = e^{\arcsin x}$

20. $y = f(a+x)$

21. $y = f(a+bx^2)$

22. $y = f\left(\frac{a}{x}\right)$

23. $y = \frac{1}{x^2} f\left(\frac{x+a}{b-x}\right)$

24. $y = \operatorname{arctg}\left(\frac{3a^2x - x^3}{a(a^2-3x^2)}\right)$

25. $y = f\left(\frac{a}{x}\right)\varphi\sqrt{x^2-1}$

26. $y = \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$

27. $y = \frac{f(\operatorname{arctg} x)}{(1+x^2)^2}$

28. $y = (1+x^2) f(\operatorname{arctg} x)$

29. $y = e^{f(x^2)} a^{\varphi(\sqrt{x})}$

30. $y = \arcsin\left(\frac{1}{x}\right)$

31. $y = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

32. $y = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

33. $y = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}\right)$

34. $y = f\left(\frac{x^2+1}{x-1}\right) + F\left(\frac{1}{x}\right)$

35. Дана сумма:

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \ldots + \sin nx = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)x \cdot \sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

Найти сумму:

$$\cos x + 2\cos 2x + 3\cos 3x + \ldots + n\cos nx$$

36. Дано произведение:

$$\sin x \cdot \sin\left(x+\frac{\pi}{m}\right)\sin\left(x+\frac{2\pi}{m}\right)\ldots\sin\left(x+\frac{(m-1)\pi}{m}\right) = \frac{\sin mx}{2^{m-1}}$$

Найти сумму:

$$\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{m}\right) + \ldots + \operatorname{ctg}\left(x+\frac{(m-1)\pi}{m}\right)$$

37. Вывести производную от $\arcsin x$ и $\operatorname{arctg} x$, не рассматривая их как обратные функции.

38. Если $P$ и $Q$ две целые функции от $x$ и
$$\sqrt{1-P^2} = Q\sqrt{1-x^2}$$
то
$$\frac{dP}{\sqrt{1-P^2}} = n\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

39. Если $y=\frac{1}{x}$, то
$$\frac{dy}{\sqrt{1+y^4}} + \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = 0$$

40 Найти производную
$$y = \arcsin x - \frac{1}{i}\log(xi+\sqrt{1-x^2})$$

41. $y = \operatorname{arctg} x - \frac{i}{2}\log\frac{i+x}{i-x}$

42. $y = x^4+4x^3-6x^2+1$

43. $y=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

44. $y=(5x+1)^4(x^2-4)^3$

45. $y=\frac{ax-b}{ax+b}$

46. $y=\frac{1}{1-x^2}$

47. $y=\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$

48. $y=\frac{1}{\sqrt{ax+b}}$

49. $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

50. $y=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$

51. $y=e^{-x^2}$

52. $y=\log\frac{1-x}{1+x}$

53. $y=\log(x+\sqrt{a^2+x^2})$

54. $y=\log\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$

55. $y=\frac{n\sin 2x}{1-n\cos 2x}$

56. $y=\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2}$

57 $y=\arcsin 2x\sqrt{1-x^2}$

Найти производную $n^{ю}$ порядка

58. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$

59. $y = \sin ax$

60. $y = \log(1+x)$

61. Показать, что функции $e^{ax}\cos bx$ и $e^{ax}\sin bx$ удовлетворяют уравнению:

$$y'' - 2ay' + (a^2+b^2)y = 0$$

## III. Частные производные и полные дифференциалы.

1. $e^z = \cos x \cdot \cos y$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$

2. $u = (xy)^z$. " $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$

3. $v = e^{\sqrt{\frac{x}{y}}}$ " $dv$

4. $z = y^2 \log x$ " $d^2 z$

5. $2x^2 - 3y^2 + z^2 - 5 = 0$ " $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

6. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ " $d^2 z$

7. $v = x^2 y + y^2 x$ " $d^3 v$

8. $z = \operatorname{arctg} \frac{2x+y}{1-2xy}$ " $dz$

9. $v = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ " $dv$

10. $u = x^3 + 3y^2 z$ " $d^3 u$

11. Доказать, что функция $z = x\varphi(x+y) + y\psi(x+y)$ удовлетворяет ур-нию: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

12. Показать, что функция

$$u = \log(x^3+y^3+z^3-3xyz)$$

удовлетворяет ур-ию:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{3}{x+y+z}$$

13. Показать, что функция

$$z = \varphi(y+ax) + \psi(y-ax)$$

удовлетворяет ур-ию:

$$a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$$

14. Найти $\dfrac{\partial^2 \arccos(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x^2})}{\partial x\, \partial y}$

15. $u = \dfrac{xy}{x+y}$ . . . Найти $d^2y$

16 $u = x^3 - 3axy + y^2$ . . . . „ $d^3u$

17. $u = \dfrac{x+y}{\sin(x-y)}$ . . „ $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x}$

18. $u = x^3 + y^3$, причем $y = f(x)$ „ $d^3u$

19. $u = \sin(x+y+z)$, „ $z = f(x,y)$ „ $d^3u$

20. $u = \operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}$ . . . „ $u'_x$ и

21. $u = \dfrac{xy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$ . . . „ $u'_x$ и

22. $u = e^{xyz}$ . . . . . „ $u'''_{xyz}$

IV. Функции, заданные параметрически

$$\left.\begin{aligned} x &= a(1-\cos t) \\ y &= a(t-\sin t) \end{aligned}\right\} \quad \text{Найти } y'_x$$

2. $x = \frac{2t}{1+t}$ ; $y = \frac{1-t}{1+t}$. Найти $y'_x$

3. $x = a\cos\varphi$ ; $y = b\sin\varphi$. „ $y'_x$ и $y''_x$

4. $x = a\sec\varphi$ ; $y = b\,tg\,\varphi$. „ $y'_x$ и $y''_x$

5. $x = \frac{3at}{1+t^3}$ ; $y = \frac{3at^2}{1+t^3}$. „ $y'_x$

6. $y = \arcsin\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ ; $x = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$. Найти $y'_x$

7. $x = \sin t - t\cos t$ ; $y = \cos t - t\sin t$. Найти $y'_x$

8. $x = t^4 - 2t^3 - t^2 + 4t - 2$ ; $y = t^4 + 2t^3 - t^2 - 4t + 2$. Найти $y'_x$ при $x=0, y=0$

9. $x = m\sin^3 t$ ; $y = n\cos^3 t$. Найти $y'_x$

10. $x = 1+t^2$ ; $y = 2t$ . . . „ $y'_x$

## V. Функции, заданные неявно.

1. $y = 1 + xe^y$ . . . . . Найти $y'$

2. $y'' = \frac{x+y}{x-y}$ . . . . . . „ $y'$

3. $(y-1)e^{\frac{x}{2}} - a = 0$ . . . . „ $y'$

4. $x(x^2+y^2) - a(x^2-y^2) = 0$ . . . „ $y'$ при $x=y=0$

5. $x\sin y - \cos y + \cos 2y = 0$ . . . . „ $y'$

6. $y\sin x - \cos(x-y) = 0$ . . . . „ $y'$

7. $\left.\begin{array}{l} 7x^2+2y^2-3z^2=3 \\ 4x^2+2y^2-2z^2=0 \end{array}\right\}$ . . . . „ $y'_x$ и $z'_x$ при $x=1$, $y=-2$, $z^2=2$

8. $\left.\begin{array}{l} x^2+y^2-z^2=0 \\ x^2+2y^2+z^2=4 \end{array}\right\}$ Найти $d^2y$ и $d^2z$, считая $y$ и $z$ функциями $x$.

9. $x^2+y^2-2z^2=0$ ; $x^2+2y^2+z^2=4$ . Найти $y'$ и $y''$ при $x=1, y=-1$ и $z=1$, считая $y$ и $z$ функциями $x$.

10. Если $z$ есть функция $x$ и $y$

$$z=\frac{[y-\varphi(\alpha)]^2}{\varphi'(\alpha)} \qquad x+\alpha=\frac{y-\varphi(\alpha)}{\varphi'(\alpha)}$$

то, какова бы ни была $\varphi(\alpha)$,

$$\frac{dz}{dx}\cdot\frac{dz}{dy}=z$$

11. Если $(z-\varphi\alpha)^2=x^2(y^2-\alpha^2)$ ; $(z-\varphi\alpha)\varphi'\alpha=\alpha x^2$

то

$$\frac{dz}{dx}\cdot\frac{dz}{dy}=xy$$

12. Функция $y$, задана неявно ур-ием:

$$1+xy=\lg(e^{xy}+e^{-xy});$$

найти $y'$

13. $x=a\arccos\frac{a-y}{a}-\sqrt{2ay-y^2}$ . Найти $y'$ и $y''$

14. $y^x=x^y$ . Найти $y'$

15. $x^3+y^3-3axy=0$ . . . Найти $y'$ и $y''$

16. $x^2-4xy+y^2-1=0$ . . . „ $y'$ и $y''$

17. $\sin y=n\sin x$ . . . „ $y'$ и $y''$

18. $\log\sqrt{x^2+y^2}=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ . . „ $y'$ и $y''$

## VI. Ряды.

Найти суммы рядов

1. $1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{10}\right)+\frac{1.3}{2.4}\left(\frac{1}{10}\right)^2+\frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\frac{1}{10}\right)^3+\dots$

2. $1-\frac{10}{1}\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{10.11}{1.2}\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{10.11.13}{1.2.3}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\dots$

3. $1+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)+\frac{1.3}{2.4}\left(\frac{3}{4}\right)^2+\frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\frac{3}{4}\right)^3+\dots$

4. $1+3\left(\frac{4}{5}\right)+\frac{3.4}{1.2}\left(\frac{4}{5}\right)^2+\frac{3.4.5}{1.2.3}\left(\frac{4}{5}\right)^3+\dots$

5. $\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^5+\frac{1}{7}\left(\frac{1}{5}\right)^7+\dots$

6. $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3+\dots$

7. $1+2x+3x^2+4x^3+\dots$

8. $1+\frac{\lg 10}{1}+\frac{\lg^2 10}{1.2}+\frac{\lg^3 10}{1.2.3}+\dots$

9. $1-\frac{10}{1}+\frac{10^2}{1.2}-\frac{10^3}{1.2.3}+\frac{10^4}{1.2.3.4}-\dots$

10. $\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^4+\dots$

Помощью формулы Маклорена разложить в ряды следующие функции:

11. $y=e^{\sin x}$ 12. $y=\frac{e^{\sin x}}{\cos x}$

13. $y=\sqrt{1+e^x}$ 14. $y=e^{e^x}$

15. $y=e^{-x^2}$ 16. $y=\frac{2+x}{2-x}$

17. $y=\log\frac{1+x}{1-x}$. Полагая затем $x=\frac{1}{2n+1}$ вывести формулу: $\log(n+1)-\log n=2\left[\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\dots\right.$ служащую для вычисления Неперовых логарифмов последовательных целых чисел.

## VII. Maxima et minima.

Найти max. или min. функций:

1. $y = x^3 - 6y^2 + 9x + 5$
2. $y = \frac{x}{\log x}$
3. $y = x^x$
4. $y = e^x + 2\cos x + e^{-x}$
5. $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 7$
6. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$
7. $z = x^3 + y^3 - 9xy + 27$
8. $u = xy^2z^3(a - x - y - z)$
9. $z = xy(x + y - 1)$
10. $z = (3x^2 + 2y^2)e^{-x^2-y^2}$
11. $z = x^2 + y^4$

## VIII. Относительные maxima и minima.

12. Найти maximum функции

$$f = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \dots x_n$$

при условии

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = a$$

13. Найти maximum функции:

$$f = \sin x . \sin y . \sin z$$

при условии

$$x + y + z = \pi$$ ($x, y$ и $z$ - углы тр-ка)

14. Найти maximum и minimum функции:

$$f = x^2 + y^2 + (x + y)^2$$

при условии

$$1 \leq x^2 + y^2 \leq 2.$$

## IX. Раскрытие неопределенностей.

1. $\left|\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}\right|_{x=\infty}$ 2. $\left|\dfrac{e^{\frac{a}{x}}}{e^{\frac{b}{x}}}\right|_{x=0}$ $a>0; b>0.$

3. $\left|\dfrac{1-3x^2+2x^3}{(x^2-1)^2}\right|_{x=1}$ 4. $\left|\dfrac{2}{1-x^2}-\dfrac{3}{1-x^3}\right|_{x=1}$

5. $\left|\dfrac{\log x}{x^n-1}\right|_{x=1}$ 6. $\left|\dfrac{\log\sin\frac{x\pi}{2}}{(x-1)^2}\right|_{x=1}$

7. $\left|\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}\right|_{x=0}$ 8. $\left|\dfrac{x^2-\sin^2 x}{x^4}\right|_{x=0}$

9. $\left|\dfrac{\sin x - x\cos x}{x(1-\cos x)}\right|_{x=0}$ 10. $\left|\dfrac{\log x}{x^n}\right|_{n=\infty}$

11. $\left|\,x^x\right|_{x=0}$

## X. Приложения дифференциального исчисления к геометрии.

Провести касательную и нормаль к кривой:

1. $y=x^3+2x^2-4x-3$
в точке с абсциссой равной нулю.

2. $y^2=7x$ через точку $(-1,3)$

3. Показать, что параболы
$$y^2=2px+p^2 \quad \text{и} \quad y^2=-2qx+q^2$$
пересекаются под углом в 90°.

4. Показать, что софокусные эллипс и гипербола пересекаются под прямым углом.

Построение некоторых кривых:

1. $y = \sin x$ (синусоида)

2. $x = a \arccos \frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2}$ (циклоида)

3. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ (Декартов лист)

4. $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ (Цепная линия)

5. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ (астроида)

6. $(x^2+y^2)^2 - 2a^2(x^2-y^2) = 0$ (лемниската)

Найти особенные точки:

1. $ay^2 = x^2(a+x)$

2. $(x^2+y^2)^2 - 2a^2(x^2-y^2) = 0$ (лемниската)

3. $x^4 + y^4 - a^2(x^2+y^2) = 0$

4. $x(x^2+y^2) - ay^2 = 0$ (циссоида)

5. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ (Декартов лист)

Изучить кривые:

1. $y = x^{\frac{2}{3}}(x+1)^3$

2. $y^2 = x(1+x^2)$

3. $y = a^x$

4. $y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$

5. $y = (x-1)(x-2)(x-3)$.

Найти точки перегиба:

6. $y(a^2+x^2) = (a-x)b^2$

Найти радиус кривизны кривых:

7. $y = x^x$ в точке $x=1$

8. $r = t^2$, $\theta = t-1$ в точке $t=1$

9. $r = a(1-\cos\theta)$ (Кардиода)

Найти эволюты кривых:

10. $y^2 = 2px$   11. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

12. $x = a(t-\sin t)$; $y = a(1-\cos t)$

13. Показать, что для кривой

$$r^{k-1} = a^{k-1}\sin(k-1)\theta$$ .

$\rho = \frac{1}{k}$ длины полярной нормали.

14. Определить порядок соприкосновения циклоиды с параболой.

15. Составить ур-ие касательной плоскости к поверхности $y - z^2 - f(a^x + my) = 0$.

16. Составить ур-ие плоскости соприкасающейся к кривой $x = e^{y+1}$, $z = e^{\sin y}$.

17. Составить ур-ие касательной плоскости к поверхности

$$f\left(\frac{x^2+y}{x-z}\right) + F\left(\frac{1}{x}\right) - y^2 = 0$$

18. Составить ур-ия касательной плоскости и нормали к поверхности

$$x^2 + y^2 = z^2(3+x^2) \quad \text{в точке } x=1, z=\frac{1}{2}$$

19. Составить ур-ие касательной и главной нормали к

$$z = ae^x - y \;;\; 2y - 3z = x^2$$

20. Через точку пересечения с $OZ$ поверхности

$$x^2 + 2xy^2 + z^2 = 1$$

провести касательную плоскость, ||-ую плоскости: $x - y + 2z = 0$

21. Найти радиус 1^ой^ кривизны кривой
$$x = t^3\,,\ y = t^2 - 3\,,\ z = t^3 + 2t$$
в точке $t = 0$

22. Найти на эллипсоиде
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$
точку, касательная плоскость к эллипсоиду в которой || плоскости $x + y + z = 0$

23. Показать, что поверхности
$$xy = az^2\,,\ x^2 + y^2 + z^2 = b\,,$$
$$z^2 + 2x^2 = c(z^2 + 2y^2)$$
пересекаются под прямым углом.

Составить ур-ия поверхностей
и касательных плоскостей к ним:

24. Описываемой прямой, проходящей через точку $(1, -1, 1)$ и пересекающей кривую
$$\tfrac{1}{2} y = x^2,\ z = y.$$

25. Описываемой прямой, параллельной прямой
$$x = 3z\,,\ y = 5z$$
и пересекающей кривую
$$x + y - z = 2\,,\ x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

Вычертить кривые.

26. $y = \frac{1}{3}(x+1)^3(3x-2)^2$ 27. $y = \sqrt{\frac{x-1}{x(x+1)}}$

28. $y = x\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}$ 29. $x = \frac{3at}{1+t^3}\,;\ y = \frac{3at^2}{1+t^3}$

30. Найти точки перегиба кривой:
$$y = (x-a)(x-b)(x-c).$$

# Интегрирование функций.

## I Непосредственное интегрирование.

1. $\int (ax+b)^m dx$

2. $\int e^{ax} dx$

3. $\int \cos dx\, dx$

4. $\int \frac{x\,dx}{x^2 \pm a^2}$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

6. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

7. $\int \frac{dx}{3x^2+5}$

8. $\int \frac{x\,dx}{3x^2+7}$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-5x^2}}$

10. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{9-4x^2}}$

11. $\int \frac{(mx+n)\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

12. $\int \operatorname{tg} x\, dx$

13. $\int \operatorname{ctg} x\, dx$

14. $\int \sin^2 x\, dx$

15. $\int \cos^2 x\, dx$

16. $\int \operatorname{tg}^2 x\, dx$

17. $\int \operatorname{ctg}^2 x\, dx$

18. $\int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos x}$

19. $\int \frac{dx}{\sin x}$

20. $\int \frac{dx}{\cos x}$

21. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$

22. $\int \frac{1+x\sqrt{x}}{x\sqrt[3]{x}}dx$

23. $\int \frac{dx}{x^2-a^2}$

24. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$

25. $\int \left(1-\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)dx$

26. $\int \frac{dx}{(x-a)^2}$

27. $\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)}$

## II. Интегрирование по частям.

$\int \log x\, dx$

2. $\int \arcsin x\, dx$

3. $\int \operatorname{arctg} x\, dx$

4. $\int x e^x dx$

5. $\int x \cos x\, dx$

6. $\int x \log x\, dx$

7. $\int e^{ax} \cos bx \cdot dx$

8. $\int e^{ax} \sin bx\, dx$

9. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

10. $\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx$

## III. Интегрирование рациональных дробей.

1. $\int \frac{x\,dx}{x^3+1}$

2. $\int \frac{(2x+1)dx}{(x-1)^3(x+1)(x^2+x+1)}$

3. $\int \frac{x\,dx}{(x^2+a)^m}$

4. $\int \frac{(2x+1)dx}{(x-1)^2(x+1)(x^2+x+1)}$

5. $\int \frac{(x^2+1)dx}{(x-1)^8}$

6. $\int \frac{dx}{(x-1)^3(x+1)^4}$

7. $\int \frac{x^8 dx}{(x^4-1)^3}$

8. $\int \frac{(x+1)dx}{x^4-x^2+1}$

9. $\int \frac{1+x^4}{1-x^6}dx$

10. $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$

11. $\int \frac{x^2-x+1}{(x-1)^2(x+1)^2}\,dx$

12. $\int \frac{x^2+6x+5}{x^2-6x-5}\,dx$

13. $\int \frac{dx}{x^3(x-1)^2}$

14. $\int \frac{x^2+2}{x^4-1}\,dx$

15. $\int \frac{dx}{(x^2+a)^2}$

16. $\int \frac{4x^2-6x+1}{2x^3-x^2}\,dx$

17. $\int \frac{x^4+1}{(x^3-1)^2}\,dx$

## IV. Интегрирование иррациональных функций

1. $\int \frac{dx}{x-\sqrt{2x+1}}$

2. $\int \frac{\sqrt[4]{x}\,dx}{\sqrt{x}-1}$

3. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+1)^4}}$

4. $\int \frac{x^3-x^2+1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-3x+5}}$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x-2x^2}}$

7. $\int \frac{dx}{(x^2+x+1)\sqrt{2x^2+2x-3}}$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$

9. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{2x-3x^2}}$

10. $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}}$

11. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1+x^3}}$

12. $\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^{5/2}}$

13. $\int \frac{\sqrt{a+bx^n}}{x}\,dx$

14. $\int \frac{\sqrt[4]{1+x^2}}{x}\,dx$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-x^3}}$

16. $\int \frac{dx}{(2x^3+3)\sqrt[3]{4x^3+5}}$

17. $\int \frac{(x-1)\,dx}{(x+1)\sqrt{x^4+1}}$

18. $\int \frac{x\,dx}{2+\sqrt{1+x}}$

19. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a+bx^2}}$

20. $\int \frac{(3x^2-2x^4)\,dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$

21. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$

## V. Интегрирование трансцендентных функций

1. $\int (2x-1)e^{-x}\cdot\cos 3x\,dx$

2. $\int \frac{dx}{2+\sin x-4\cos x}$

3. $\int (x^2+1)\cos 4x\,dx$

4. $\int \frac{\sin^4 x\,dx}{\cos x}$

5. $\int \sin^3 x\cdot\cos^4 x\,dx$

6. $\int \sin^4 x\cos^6 x\,dx$

7. $\int \frac{dx}{\sin^3 x\cdot\cos^4 x}$

8. $\int \frac{\sin x\,dx}{\sin^3 x+\cos^3 x}$

9. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sin x-\cos^3 x}$

10. $\int \sin 4x\,dx$

11. $\int \frac{\sin 2x\,dx}{\cos 3x}$

12. $\int \frac{dx}{1+\cos^2 x}$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{\cos x(1-\cos x)}}$

14. $\int e^{-2x}(x^3-x-1)\,dx$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x\cdot\cos^4 x}}$

16. $\int \frac{dx}{e^x+1}$

# Ответы и решения.

# Аналитическая Геометрия.

## I. Координаты и уравнения.

1. Имеем $\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(x+3)^2+(y-5)^2}$ или, т.к. по условию $y=0$, $x = \sqrt{(x+3)^2+25}$, откуда $x=-\frac{17}{3}$. Искомая точка $(-\frac{17}{3}, 0)$

2. $1 = \sqrt{(2-1)^2+(4-2)^2+2(1-2)(2-1)\cos\theta}$ ; $\cos\theta = \frac{1}{2}$ ; $\theta = 60°$

3. $\frac{x-2}{2} = 1$ ; $\frac{y+5}{2} = 1$ ; $x=4$, $y=7$.

4. Решим вопрос относительно одной из медиан. Координаты середины $AB$ будут $x_c = \frac{7}{2}$, $y_c = -\frac{7}{2}$. Имеем по условию

$$\frac{x_1+\frac{7}{2}}{2} = x_2 \qquad \frac{0+x_2}{2} = x_1$$

$$\frac{y_1-\frac{7}{2}}{2} = y_2 \qquad \frac{0+y_2}{2} = y_1$$

O, A(5,0), X, C, B(2,-7), -y, 0, $x_1y_1$, $x_2y_2$, c

Черт. 1.

Решая эти ур-ия, имеем: $x_1 = \frac{7}{6}$, $y_1 = -\frac{7}{6}$, $x_2 = \frac{7}{3}$, $y_3 = -\frac{7}{3}$

Аналогично решается вопрос относительно и остальных медиан.

5. $y^2 = x$

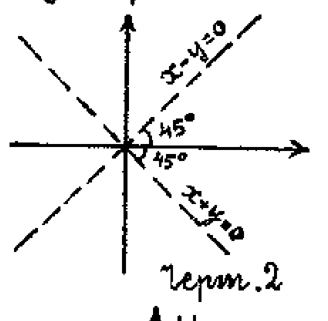
6. $x^2+y^2=1$

7. $x = 3\cdot\frac{1}{2}$ ; $y = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Координаты нового начала суть $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$, следоват. $\frac{3}{2} = x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ ; $3\frac{\sqrt{3}}{2} = y_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$. Искомые координаты: $\left(\frac{3-\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}\right)$.

8. $x=-2\cos 5°$, $y=2\sin 5°$; $x_1=3\cos 65°$, $y=-3\sin 65°$

$$d=\sqrt{(-2\cos 5°-3\cos 65°)^2+(2\sin 5°+3\sin 65°)^2}=$$
$$=13+12\cos 5°\cdot\cos 65+12\sin 5°\cdot\sin 65°=$$
$$=13+12\cos 60°=13+6=19.$$

9. а) Точка $(0,0)$ б) $(x+y)(x-y)=0$. Совокупность двух прямых: $x+y=0$ и $x-y=0$; они являются биссектрисами координатных углов (черт. 2)




Черт. 2

в) $x(x+y)=0$ или $x+y=0$, или $x=0$; второе ур-ие выражает ось OY (черт. 2)

г) $x=0$, или $y=0$ (ось OY и ось OX)

д) $y=\sqrt{a^2-x^2}$, $x$ не может быть $>a$, т.к иначе имеем для $y$ мнимые значения. Составляем таблицу

Черт. 3

| | D | C | B | A |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | …0… | $\pm\frac{a}{3}$… | $\pm\frac{a}{2}$… | $\pm a$ |
| $y$ | …$\pm a$… | $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$… | $\frac{a\sqrt{3}}{2}$… | 0 |

Соединяя полученные точки, получаем кривую (черт. 3) - окружность

е) $x=0$ или $y=a$

ж) $(x-y)(x^2+y^2-1)=0$;

$x-y=0$ (прямая, см. б))

или $x^2+y^2=1$ (окружность, см. д))

Черт. 4

10. $x=x_1+1$; $y=y_1+2$; $x_1+1-y_1-2=0$, т.е $x_1-y_1=1$ см.ч.4.

11. $x=x_1\cos 45°-y_1\sin 45°$; $y=x\sin 45°+y_1\cos 45°$

$x=\frac{\sqrt{2}}{2}(x_1-y_1)$; $y_1=\frac{\sqrt{2}}{2}(x_1+y_1)$

$x_1-y_1-(x_1+y_1)=0$ или $y_1=0$ (ось OX).

12. Найдем предварительно площадь Δ-ка по координатам вершин (см. черт. 5 на след. стр.).

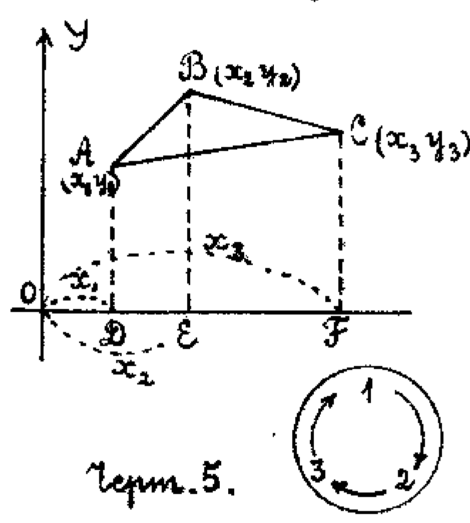
пл. Δ = пл. ABCDF - пл. ADCF = пл. ADBE + пл. BCEF - пл. ADCF

Замечая, что три последние фигуры трапеции, имеем

$$\text{пл.}\,\Delta = \frac{(y_1+y_2)(x_2-x_1)}{2} + \frac{(y_2+y_3)(x_3-x_1)}{2} - \frac{(y_1+y_3)(x_3-x_1)}{2}$$

После всех преобразований получим

$$\text{пл.}\,\Delta = \frac{1}{2}\left[y_1(x-x_3) + y_2(x_3-x_1) + y_3(x_1-x_2)\right]$$




черт. 5.

Для запоминания заметим что значки $y$ идут повышаяс на 1 (1, 2, 3), а значки $x$ подчи няются правилу круговой пе рестановки (напр., если берем после значка 3, то идя по стрел ке, получаем $x_1 - x_2$).

Для нашего примера

$$\text{пл.}\,\Delta = \frac{1}{2}\left[1(-2)+1\cdot 4\right] = 1 \text{ кв. ед.}$$

13. Имеем $x = r\cos\varphi$, отсюда $r^2 = ax$ или $x^2+y^2-ax=0$

Для 2-ой линии $r\cos\varphi = a\cos\varphi + b$ или $x = \frac{ax}{\sqrt{x^2+y^2}} + b$.

Для 3-ей линии $\sqrt{x^2+y^2} = a + a\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Для 4-ой линии (лемнискаты) получаем:

$$x^2+y^2 = a^2(\cos\varphi+\sin\varphi)(\cos\varphi-\sin\varphi) =$$

$$= a^2\left(\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\left(\frac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

и окончательно

$$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$$

## II. Прямая линия.

14. $a = \frac{\sin\alpha}{\sin(\theta-\alpha)}$; $2 = \frac{\sin\alpha}{\sin(120-\alpha)}$; $\frac{2\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + 2\cdot\frac{1}{2}\sin\alpha = \sin$

откуда $\sqrt{3}\cos\alpha = 0$, $\alpha = 90°$

15. Имеем $y = ax$ (I) и $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}$ (II)

$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a-a_1}{1+aa_1}$, полагая $\varphi = 60°$, получим $\sqrt{3} = \frac{a+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-a\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}}$

или $\sqrt{3} - a = a + \frac{1}{\sqrt{3}}$; $2a = \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$; $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Подставляя в (I), имеем $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$.

Второе решение получится из ур-ия

$$\sqrt{3}=\frac{-\frac{1}{\sqrt{3}}-a_1}{1+a_1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

или

$$\sqrt{3}-a_1=-\frac{1}{\sqrt{3}}-a_1$$

$$a_1=\infty$$

Черт. 6.

Подставляя в (I), имеем $y=\infty x$ или $x=0$

16. Напишем ур-ие одной из медиан, напр. $AD$. Координаты точки $D$, как середины отрезка $OB$, определяются по формулам

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}\qquad y=\frac{y_1+y_2}{2},$$

Черт. 7

подставляя, имеем: $x=\frac{a}{2}$; $y=\frac{b}{2}$; уравнение прямой $AD$:

$$\frac{x}{a}=\frac{y-b}{-b}\qquad \text{или}\quad -bx=ay-ab \quad\text{или}\quad bx+ay=ab.$$

В виде упражнения предлагается аналогично найти ур-ия остальных двух медиан и показать, что все они пересекутся в одной точке.

17. Решая $2x-y-3=0$ и $x+y+6=0$ находим $x=-1, y=-5$

Уравнение прямых проходящих через точку $(-1,-5)$

$$y+5=a(x+1)\quad \ldots\ldots\quad (A)$$

или $ax-y=5-a$; деля на $(5-a)$

$$\frac{x}{\frac{5-a}{a}}+\frac{y}{a-5}=1\quad \text{(ур-ие прямой в отрезках)}$$

по условию $\frac{5-a}{a}=a-5$, т.е. $a_1=-1$, $a_2=5$; подставляя в (A) имеем

$$y+5=-(x+1)\quad \text{или}\quad x+y+6=0$$

$$y+5=5x+5\quad \text{или}\quad y=5x$$

Отрезки могут быть еще равны по величине, но обратны по знаку, т.е.

$$\frac{5-a}{a}=5-a\quad ;\quad a_1'=5\ \text{ и }\ a_2'=1.$$

Подставляя в (А) значение $a_2'$ ($a_1'$ уже было), получаем

$$y+5=x+1$$

или

$$y-x+4=0$$

черт. 8.

18. Пересечение $3x+y-2=0$ с осью OY дает точку (0,2). Ур-ие прямых, проходящих через эту точку: $y-2=ax$; $\operatorname{tg}\varphi=\frac{a-a_1}{1+aa_1}$; $\varphi=45^\circ$; поэтому $1=\frac{a+3}{1-3a}$, откуда $a=-\frac{1}{2}$.

Другое решение: $1=\frac{-3-a}{1-3a}$, откуда $a=2$

Искомые прямые: $y-\frac{2}{3}=-\frac{1}{2}x$ и $y-\frac{2}{3}=2x$.

19. Вычисляем расстояние AB. Координаты A: $\left(-\frac{b_1}{a},0\right)$

$$\text{дл. } AB=\frac{y-ax-b}{\sqrt{1+a^2}}=\frac{0-a\left(-\frac{b_1}{a}\right)-b}{\sqrt{1+a^2}}=\frac{b_1-b}{\sqrt{1+a^2}}$$

В нашем примере $b=\frac{5}{2}$, $b_1=-\frac{7}{4}$, $a=-\frac{3}{2}$

Итак

$$\text{дл. } AB=\frac{-\frac{7}{4}-\frac{10}{4}}{\sqrt{1+\frac{9}{4}}}=\frac{-\frac{17}{4}}{\frac{\sqrt{13}}{2}}=$$

$$=\frac{17}{2\sqrt{13}}$$ (Знак у $\sqrt{\ }$ минус.)

черт. 9.

20.

$$\delta=\frac{(Ax_1+By_1+C)\sin\theta}{\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\theta}}$$

Для нашего примера $\theta=120^\circ$

$$\delta=\frac{(5.2+2.5+6)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{25+4-2.5.2\cdot\frac{1}{2}}}=\frac{13\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$$

21. $\operatorname{tg}\varphi=\frac{(a-a_1)\sin\theta}{1+aa_1+(a+a_1)\cos\theta}$; $a=-\frac{2}{3}$; $a_1=4$; $\varphi=90^\circ$

откуда

$$\infty = \frac{(a-a_1)\sin\theta}{1-\frac{2}{3}\cdot 4+(4-\frac{2}{3})\cos\theta}$$

что дает

$$-\frac{5}{3}+\frac{10}{3}\cdot\cos\theta=0\ ;\ \cos\theta=\frac{1}{2}\ ;\ \theta=60^\circ$$

22.
$$\delta=\frac{(Ax_1+By_1+C)\sin\theta}{\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\theta}}$$

Ур-ие прямой $3x+2y-6=0$ ; $\theta=60^\circ$; $\delta=3$

Имеем

$$3=\frac{(3x_1+2y_1-6)\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{13-12\cdot\frac{1}{2}}}=\frac{(3x_1+2y_1-6)\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{7}}$$

Т.к. точка на оси абцисс, то $y_1=0$ ; тогда

$$3\sqrt{7}=\frac{3\sqrt{3}}{2}x_1-3\sqrt{3}\ ;\ \sqrt{7}-3=\frac{\sqrt{3}}{2}x_1\ ;\ x_1=\frac{2(\sqrt{7}-3)}{\sqrt{3}}$$

23. $x=x_1\cos\alpha-y_1\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}(x_1-y_1)$

$$y=x_1\sin\alpha+y_1\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}(x_1+y_1)$$

Ур-ие 1$^{ой}$ прямой в новых координатах:

$$2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(x_1-y_1)-3\frac{\sqrt{2}}{2}(x_1+y_1)=0$$

или

$$x_1+5y_1=0\ ;\ y_1=-\frac{1}{5}x_1\ \ldots(\text{I})$$

Уравнение 2$^{ой}$ прямой : $y_1=\frac{2}{3}x_1\ \ldots(\text{II})$

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{5}}{1-\frac{2}{15}}=\frac{\frac{13}{15}}{\frac{13}{15}}=1\ ;\ \varphi=45^\circ$$

Предлагается доказать вообще, что две прямые $y=ax$ и $y_1=ax_1$ заданные относительно систем $(X,Y)$ и $(X',Y')$ составляют друг с другом угол $\theta$, т.е. тот угол, под которым наклонена система $(X',Y')$ к системе $(X,Y)$

24.
$$2=\frac{(1-2+5)\sin\theta}{\sqrt{1+4-4\cos\theta}}=\frac{4\sin\theta}{\sqrt{3-4\cos\theta}}$$

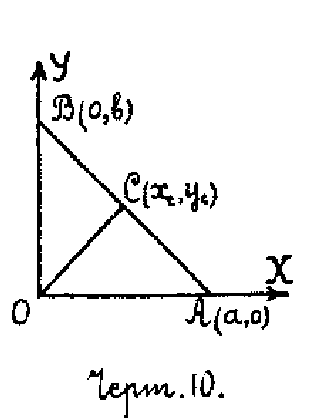
или

$$1=\frac{2\sin\theta}{\sqrt{3-4\cos\theta}}$$

Возвышая в квадрат обе части и решая относительно $\cos\theta$, находим $\cos\theta = \frac{1}{2}$, т.е. $\theta = 60°$

25. Имеем $x_c = \frac{a}{2}$; $y_c = \frac{b}{2}$

Ур-ие медианы $OC$: $\frac{x}{\frac{a}{2}} = \frac{y}{\frac{b}{2}}$ или $bx - ay = 0$.



Черт. 10.

Длина ⊥-ра, опущенного из точки $B(0,b)$

$$d = \frac{b.0 - ab}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Длина ⊥-ра, опущенного из точки $A(a,0)$

$$d = \frac{b \cdot a - a \cdot 0}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Аналогично решается и для других медиан.

26. Точка пересечения прямых $(-1,3)$. Уравнение пучка

$$y - 3 = a(x+1)$$

По условию

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{-\frac{3}{4} - a}{1 - \frac{3}{4}a} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{a + \frac{12}{5}}{1 - \frac{12}{5}a}$$, где $\varphi$ и $\varphi_1$ - углы биссектрисы с прямыми. По заданию $\varphi = \varphi_1$. Приравнивая оба выражения ур-ия относительно $a$, находим $a_1 = \frac{7}{4}$; $a_2 = -\frac{4}{7}$

27. $r = \left[\cos\varphi \cdot \cos\frac{\pi}{2} + \sin\varphi \cdot \sin\frac{\pi}{2}\right] = 2a$ или $r\sin\varphi = 2a$

то есть $y = 2a$ ... -уравнение 1ой прямой.

$$r = \left[\cos\varphi \cdot \cos\frac{\pi}{6} + \sin\varphi \cdot \sin\frac{\pi}{6}\right] = a$$

то есть $r\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi + \frac{r}{2} = a$ или $\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y = a$ ... -ур-ие 2ой пр-ой

Итак, ур-ия прямых: $y = 2a$; $\sqrt{3}x + y = 2a$ Точка перес-ия $(0,2a)$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{0+\sqrt{3}}{1 - 0.\sqrt{3}} = \sqrt{3} \quad ; \quad \varphi = 60°$$

Полярные координаты точки пересечения:

$$r\cos\varphi = 0 \quad ; \quad r\sin\varphi = 2a \quad ; \quad 2a \cdot \operatorname{ctg}\varphi = 0$$

или

$$\varphi = 90° \quad ; \quad r = 2a.$$

28. $1=4x+3y$ ; $1=3x-4y$ ; прямые взаимно ||-ны.

29. $\left(\frac{y}{x}\right)^2-4\left(\frac{y}{x}\right)+3=0$ ; $y=3x$ , $y=x$

30. $\left(\frac{y}{x}\right)^2-5\left(\frac{y}{x}\right)+6=0$ ; $y=3x$ , $y=2x$

31. $\left(\frac{x}{y}\right)^2-2\sec\varphi\left(\frac{x}{y}\right)-1=0$ ; $\frac{1}{\sec\varphi\pm tg\varphi}\cdot x=y$

При всяком $\varphi$ ур-ие выражает совокупность 2 прямых; при $\varphi=0$ оно обращается в $y=x$ (совпадающие прямые) и наконец, если $\varphi=90^\circ$, то оно обращается в $y=0$

32. Решается как предыдущая. Полагая $\frac{y}{x}=z$

$$z=tg\varphi\pm\sec\varphi$$

33. Решается как №15 ; $z=\sqrt{2}\pm1$ , $tg\varphi=1$ , $\varphi=45^\circ$

34. $z^2+z-6=0$ ; $z_1=2$ ; $z_2=-3$ ; $\varphi=45^\circ$

35. $(x+2y)^2+(x+2y)-2=0$ ; $z^2+z-2=0$ ; $z_1=1$ ; $z_2=-2$ ; $tg\varphi=4$.

36. Решаем относительно $y$: $3y^2-8xy-(3x^2-30x+27)=0$

$$y=\frac{8x\pm\sqrt{100x^2-36x+324}}{6}=\frac{8x\pm(10x-18)}{6}$$

что дает

$$y=3x-3 \quad \text{или} \quad y=-\tfrac{1}{3}x+3$$

Произведение угловых коэффициентов $3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=-1$, стало быть прямые перпендикулярны.

37. Решая относительно $y$, имеем

$$y=\frac{x+1\pm\sqrt{-3(x^2-2x+1)}}{2}=\frac{(x-1)\pm3(x-1)i}{2}$$

$$\left.\begin{aligned} y&=\frac{(x+1)+3i(x-1)}{2}\\ y&=\frac{(x+1)-3i(x-1)}{2}\end{aligned}\right\}$$ Совокупность двух мнимых прямых.

38. Деля на $y^3$ и обозначая $\frac{x}{y}$ через $z$ получим кубичное ур-ие: $z^3-6z^2+11z-6=0$ . Ур-ие это удовлетворяется значением $z=1$, стало быть левая часть его делится на $z-1$; выполняя деление, получим в частном $z^2+5z+6$ ; уравняв это частное нулю, найдем $z_1=-3$ и $z_2=-2$. Итак предложенное ур-ие можно записать в виде

$$(z-1)(z+2)(z+3)=0.$$

т. е. видно, что оно выражает три прямые линии:

$$y=x\ ;\ x+2y=0 \text{ и } x+3y=0$$

## III. Кривые 2-го порядка.

39. Общее ур-ие $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$

Подставляя $x=0$ и $y=0$ (координаты точки (0,0), получим $F=0$. Из того, что кривая проходит через точки:

точку (0,1) имеем $C+E=0$ . . . . . . (I)

" (1,0) " $A+D=0$ . . . . . . (II)

" (2,-5) " $4A-10B+25C+2D-5E=0$ . . (III)

" (-5,2) " $25A-10B+4C-5D+2E=0$ . . (IV)

Ур-ия (III) и (IV) вместе с (I) и (II) принимают вид

$$2A+10B+30C=0 \ \dots\ (III')$$

$$30A-10B+2C=0 \ \dots\ (IV')$$

Вычитая из нижнего ур-ия верхнее, получим: $A=C$. Подставив в одно из ур-ий: (III') или (IV'), найдем $B=\frac{16}{5}A$. Выразив все коэффициенты через $A$ и сокращая на $A$, получим ур-ие кривой

$$5x^2+16xy+5y^2-5x-5y=0$$

40. Находим пересечение с OX, т. е. решаем заданное ур-ие с ур-ем $y=0$. Получим $2x^2-6x+3=0$. Координаты искомой точки $\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2},0\right)$ и $\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2},0\right)$.

Для нахождения точки пересечения с OY решаем ур-ие $y^2-2y+1=0$. Координаты искомой точки (0,1).

Для нахождения точек пересечения с биссектрисами координатных углов, решаем заданное ур-ие совместно с ур-ем $y=x$, а также с ур-нем $x=-y$. Получим

в первом случае $-12x+3=0$; коорд-ты точки $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$

во втором " $0\cdot y+3=0$; " " $(\pm\infty,\pm\infty)$

41. Решая данные ур-ия совместно, получим

$$3x^2-2x(2x+1)+4(2x+1)^2+x-1=0$$

и придем к ур-ию: $5x^2+5x+1=0$, коего корни суть $x=\frac{5\pm\sqrt{5}}{10}$; после подстановки в ур-ие $y=2x+1$, найдем $y=\frac{\pm\sqrt{5}}{5}$. Подставляя эти значения в формулу

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

найдем после небольших выкладок $d=1$

42. $B^2-AC=\frac{9}{4}+3.2>0$ .. гипербола. Находим координаты центра

$$\left.\begin{aligned}9x-3y-1=0\\-3x+3=0\end{aligned}\right\}\ x=1\ ;\ y=\frac{8}{3}$$

Ур-ие ассимптоты, как прямой, проходящей через центр

$$y-\frac{8}{3}=a(x-1)$$

Угловой коэффициент $a$ удовлетворяет ур-ию

$$A+2Ba+Ca^2=0$$

Подставляя числовые значения, имеем

$$2-3a+0\cdot a^2=0$$

В этом случае один из корней $a_1=\infty$ (см. любой курс алгебры) и $a_2=\frac{2}{3}$. Значит ур-ия прямых будут

$$x-1=0 \quad и \quad 2x-3y+1=0.$$

43. Пусть кривая дана ур-ием:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \quad \dots \quad (*)$$

Из того, что кривая проходит через точку

(0,0) имеем условие .... $F=0$ ... (I)

(0,1) ,, ,, $C+2E=0$ ... (II)

(1,0) ,, ,, $A+2D=0$ .. (III)

Координаты центра должны удовлетворять ур-иям

$$Ax+By+D=0 \quad \dots \quad (IV)$$

$$Bx+Cy+E=0 \quad \dots \quad (V)$$

Подставляя значение данных координат

$$2A+3B+D=0 \quad \dots \quad (IV')$$

$$2B+3C+E=0 \quad \dots \quad (V')$$

Решая эти ур-ия, находим $B=D$; $A=-2D$; $C=-\frac{4}{5}D$;
$E=\frac{2}{5}D$; подставляя в (*) и сокращая на $D$ получим ур-ие

$$5x^2-5xy+2y^2-5x-y=0$$

44. Отыскивая координаты центра

$$2x-3y+2=0$$
$$-3x+10y-3=0$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}-3 & 2\\ 10 & -3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & -3\\ -3 & 10\end{vmatrix}}=-1\ ;\quad y=\frac{\begin{vmatrix}2 & 2\\ -3 & -3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & -3\\ -3 & 10\end{vmatrix}}=0$$

Итак координаты центра $(-1,0)$. Ур-ие пучка прямых проходящих через точку $(-1,0)$: $y=a(x+1)$

Диаметр || прямой $x-2y+4=0$, должен иметь угловым коэффициентом $\frac{1}{2}$, т.е. $a=\frac{1}{2}$ и ур-ие искомого диаметра будет

$$x-2y+1=0$$

Между угловыми коэфф-ми сопряженных диаметров существует зависимость

$$m'=-\frac{A+Bm}{B+Cm}$$

в нашем случае $A=1$; $B=-\frac{3}{2}$; $C=5$; $m=+\frac{1}{2}$

тогда
$$m'=-\frac{1-\frac{3}{4}}{-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}}=-\frac{1}{4}$$

Итак ур-ие диаметра, сопряженного с данным

$$x+4y+1=0$$

45. Центр найдется из ур-ий:

$$\left.\begin{array}{l} y+1=0\\ x+2y=0\end{array}\right\}\ \text{коорд. центра } (2,-1)$$

Уравнение диаметров

$$y+1=m(x-2)$$

В формуле

$$m'=-\frac{A+Bm}{B+Cm}$$

полагаем $m'=m$ (диаметры совпадающие) и подставляем

числовые значения

$$m = -\frac{\frac{1}{2}m}{\frac{1}{2}+m} \;;\; m_1 = 0 \;;\; m_2 = -1$$

Уравнения диаметров

$$y+1=0 \qquad x+y-1=0$$

46. В формуле

$$m' = -\frac{A+Bm}{B+Cm}$$

полагаем $m' = \frac{2}{3}$, $m = \frac{1}{2}$, тогда

$$B+6A-2C=0 \;\dots\; (I)$$

Полагая же $m'=1$, $m=\frac{3}{5}$, получим

$$8B+5A+3C=0 \;\dots\; (II)$$

Решая совместно ур-ия $x-y=0$, $3x-5y=0$, находим $x=y=$[illegible] - это координаты центра; подставляя значения их в ур-ия

$$\left.\begin{aligned} Ax+By+D&=0 \\ Bx+Cy+E&=0 \end{aligned}\right\} \text{найдем } D=E=0$$

Принимая это во внимание, а также, что кривая проходит через точку (1,1) получим еще ур-ие

$$A+2B+C+F=0 \quad \dots (III)$$

Выразив все коэффициенты через $C$, получим: $A=\frac{19}{43}C$; $B=-\frac{28}{43}C$[illegible]; $F=-\frac{6}{43}C$. Подставляя эти значения в общее ур-ие

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

и сокращая на $C$, получим

$$19x^2+56xy+43y^2-6=0$$

47. Ур-ие кривой можно написать в виде

$$yx-ay-1=0$$

$B^2-AC>0$ т.е. гипербола, имеет 2 оси. Для наглядности покажем расположение ее

| $x$ | $\dots -a \dots$ | $0 \dots$ | $a \dots$ | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | $\dots -\frac{1}{2a} \dots$ | $-\frac{1}{a} \dots$ | $\infty \dots$ | $0$ |

Черт. 11.

Координаты центра $(a,0)$. Прямые $x=a$ и $y=0$ служат ассимптотами.

Координаты центра находятся из уравнений: $y=0$; $x-a=0$, откуда и получается центр $(a,0)$.

Ур-ие диаметров будет $y=m(x-a)$. В формуле $m'=-\frac{A+Bm}{B+Cm}$ полагаем $m'=-\frac{1}{m}$, т.к. угол между осями $=90^\circ$. Получаем ур-ие

$$Bm^2+m(A-C)-B=0$$

По условию $A=C=0$, т.е. $m=\pm1$.

Итак, ур-ия осей

$$x-y-a=0 \quad \text{и} \quad x+y-a=0$$

48. Составляем ур-ия центра

$$\left.\begin{aligned} 6x-7y+3&=0 \\ 7x+12y+9&=0 \end{aligned}\right\} \text{центр } \left(-\tfrac{9}{11}, -\tfrac{3}{11}\right)$$

Подставляем в заданное ур-ие прямой

$$-\frac{63}{11}-\frac{3}{11}+6=0$$

т.е. наша прямая проходит через точку $\left(-\frac{9}{11}, -\frac{3}{11}\right)$.

Для второй кривой получаем:

$$\left.\begin{aligned} 6x-5y+11&=0 \\ -5x+12y-17&=0 \end{aligned}\right\} \text{центр } (-1,1)$$

$7\cdot(-1)+1+6=0$, т.е. прямая проходит и через эту точку.

49. а) $B^2-AC=0$ параболич.

$$\Delta=\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -3 & -\frac{3}{2} \\ -3 & 9 & \frac{9}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{9}{2} & 2 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} 1 & -3 & -\frac{3}{2} \\ -1 & 3 & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 2 \end{vmatrix}=-3\begin{vmatrix} 1 & -3 & -\frac{3}{2} \\ 1 & -3 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 2 \end{vmatrix}=0$$

т.к. две строки одинаковы, стало быть имеем 2 ||-ные прямые. Чтобы найти их ур-ия можно решить задан. ур. относительно $y$, но можно поступить проще, переписав ур-ие так $(x-3y)^2-3(x-3y)+2=0$; пусть $x-3y=z$, тогда $z^2-3z+2=0$, откуда $z_1=2$; $z_2=1$. Итак ур-ия прямых:

$$x-3y-1=0 \quad \text{и} \quad x-3y-2=0$$

б) $B^2-AC=-1<0$ эллиптич. тип.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

т.к. 1ый и 3ий столбцы одинаковы.

Имеем 2 пересекающие мнимые прямые, которые пересекаются в вещественной точке. Представив ур-ие так $(x-1)^2+y^2=0$ видим, что единственные возможные значения $x$ и $y$ ему удовлетворяющие будут $x=1$ и $y=0$, что выражает точку $(1,0)$. Это же ур-ие можно написать и так: $(x-1)^2-i^2y^2=0$ или $(x-1+iy)(x-1-iy)=0$, т.е. имеем 2 мнимые прямые $x+iy-1=0$ и $x-iy-1=0$

в) $B^2-AC=1-3<0$ эллиптич. тип

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1>0$$

видим, что у $\Delta$ знак одинаковый с $C$, значит ур-ие представляет мнимый эллипс

50. Здесь $B^2-AC=4-154<0$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 14 & -2 & 0 \\ -2 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & -60 \end{vmatrix} = -60 \begin{vmatrix} 14 & -2 \\ -2 & 11 \end{vmatrix} = -900 < 0$$

Знак $\Delta$ обратный с $C$, значит эллипс.

По формуле

$$a^2 = \frac{-2\Delta}{H(J^2-\sqrt{J^2+4H})} \qquad \text{где } H = B^2-AC$$

находим

$$a^2 = \frac{-1800}{-150(625-\sqrt{625-600})} = 6\ ;\ b^2 = \frac{-1800}{-150(625+\sqrt{625-600})} = 4$$

Уравнение эллипса будет

$$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{4}=1$$

51. Представив ур-ие (I) в виде

$$x^2+2xy+y^2+2Dx+2Ey+F=0$$

составляем : $B^2 - AC = 0$, т.е. парабола, для которой угловой коэфф. диаметра $= -\frac{A}{B}$. В нашем случае $A = 1$, $B = -1$; значит $m = -\frac{1}{(-1)} = 1$.

Кривые $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$ имеют центр в точке $(0,0)$ через которую диаметр, как общий двум кривым, должен пройти. Следовательно ур-ие его есть $y = x$.

52. В формуле $m = -\frac{A + Bm'}{B + Cm'}$ положим $m = m'$, тогда предыдущее ур-ие обращается в $Cm^2 + 2Bm + A = 0$, которое, как известно, определяет угловой коэффициент ассимптоты.

53. Точка $(a, a)$ есть, очевидно, центр круга. Ур-ие будет $(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2$

54. Координаты центра $x_c = -\frac{D}{2A}$; $y_c = -\frac{E}{2A}$ т.е. $x_c = \frac{5}{4}$ и $y_c = \frac{7}{4}$.

$$\delta = \frac{\frac{5}{4} - \frac{7}{4} + 1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

55. Сравнивая данное выражение с формулою

$$x^2 + y^2 + 2xy\cos\varphi = r^2$$

имеем $r = 1$, $2\cos\varphi = -1$, $\varphi = 120°$

56. Искомые точки $(0,0)$, $(m,0)$, $(0,n)$.

Уравнение круга в общем виде

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0$$

но $F = 0$; для точки $(m, 0)$ получаем $Am^2 + Dm = 0$ } $D = -Am$

аналогично для точки $(0, n)$ ,, $An^2 + En = 0$ } $E = -An$

Подставляя в общее ур-ие и сокращая на $A$, получаем

$$x^2 + y^2 - mx - ny = 0$$

57. Координаты вершин (0,0),(1,1),(-5,5); $F=0$; затем имеем $2A+D+E=0$ и $10A-D+E=0$, откуда $-6A=E$; $4A$
Подставляя в общее ур-ие

$$x^2+y^2+4x-6y=0.$$

58. $$\left.\begin{array}{l} a^2+b^2=a_1^2+b_1^2 \\ ab=a_1 b_1 \sin\varphi \end{array}\right\} \text{Теоремы Аполлония}$$

Подставляя $\varphi=120°$ и $a^2+b^2=19$, находим

$$a_1=\frac{\sqrt{35}+\sqrt{3}}{2}\ ;\ b_1=\frac{\sqrt{35}-\sqrt{3}}{2}$$

59. $a=2\sqrt{2}$

60. Точки: $(\sqrt{2},1)$, $(-\sqrt{2},1)$, $(\sqrt{2},-1)$, $(-\sqrt{2},-1)$. Расстояние первой из них до конца большой оси $(2,0)$ находится по формуле $d=\sqrt{(2-\sqrt{2})^2+(1-0)^2}=\sqrt{5-4\sqrt{2}}$
Аналогично выводится расстояние и от остальных точек.

61. Из соотношения $2\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{a^2+b^2}$ находим $b^2=\frac{3a}{5}$
откуда $e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\sqrt{\frac{2}{5}}$

62. $a=\sqrt{5}$, $b=2$.

63. Из равенства $\sqrt{a^2-b^2}=b$ следует, что $e=\frac{1}{\sqrt{2}}$

64. $\frac{2b^2}{a}=36$ ; $2a=24$, откуда $a=12$, $b=\sqrt{80}$

65. $2\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{ab}$ ; $b=\frac{a(\sqrt{5}-1)}{2}$ ; $e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{\sqrt{2\sqrt{5}}}{2}$

66. $r=\frac{\frac{3}{2}}{1+\frac{1}{2}\cos\varphi}$ ; т.е. $e=\frac{1}{2}<1$ кривая - эллипс
Из ур-ий

$$\frac{b^2}{a}=\frac{3}{2} \text{ и } \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{1}{2} \text{ находим } a=2,\ b=\sqrt{3}.$$

67. $a_1^2+b_1^2=81$ ; $a_1 b_1=36$. Решая эти ур-ия, найдем

$$a_1=\frac{\sqrt{157}+\sqrt{13}}{2}\ ;\ \ b_1=\frac{\sqrt{157}-\sqrt{13}}{2}$$

68. Решая ур-ия: $\sqrt{12}=a_1^2\sin\varphi$ и $S=2a_1^2$

находим $\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\varphi = 60°$; $\varphi_1 = 120°$. Из условия $mm' = -\frac{2}{6}$ видим, что годится лишь значение $\varphi_1 = 120°$

69. Имеем $2\sqrt{a^2-b^2} = 2a_1$ и $a_1 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{2}}$

отсюда
$$\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a\sqrt{2}} \quad \text{или} \quad \frac{a^2-b^2}{a^2} = \frac{a^2+b^2}{2a^2} = \frac{2a^2}{3a^2} = \frac{2}{3}$$

следовательно
$$e = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

70. Ассимптоты: $6x-5y=0$ и $6x+5y=0$. Если $(x_1, y_1)$ точка на гиперболе, то
$$\frac{\delta}{\delta_1} = \frac{\frac{6x_1-5y_1}{\sqrt{61}}}{\frac{6x_1+5y_1}{\sqrt{61}}} = \frac{6x_1-5y_1}{6x_1+5y_1} = \frac{9}{4}$$

отсюда $x_1 = -\frac{13y_1}{6}$; подстановка в ур-ие гиперболы дает
$$x_1 = \pm\frac{65}{12}; \quad y_1 = \pm\frac{5}{2}$$

71. Из чертежа: $OF = \sqrt{8-5} = \sqrt{3}$. Если

Если $\alpha$ и $\beta$ полуоси гиперболы, то $\sqrt{\alpha^2+\beta^2} = \overline{O\Phi} = \sqrt{8}$

отсюда $\alpha = \sqrt{3}$, $\beta = \sqrt{5}$

Ур-ие гиперболы
$$\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{5} = 1$$



черт 12.

72. $e = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$; $e_1 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}$
$$\frac{1}{e^2} + \frac{1}{e_1^2} = \frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2} = 1$$

73. Решая 2 ур-ия $a^2-b^2=16$ и $\frac{16}{a^2}+\frac{36}{b^2}=1$ находим $a^2=64$, $b^2=48$, где $a$ и $b$ оси эллипса. Его ур-ие $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{48}=1$

Второе решение $b^2=-12$ и $a^2=4$ дает гиперболу $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$

74. $e=2>1$, т. е. гипербола. Имеем $\frac{b^2}{a}=3$, $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=2$ отсюда $a=1$, $b=\sqrt{3}$. Ур-ия ассимптот будут $y=\pm\sqrt{3}\,x$ т.е. их углы с осью $OX$ будут $60°$ и $120°$.

75. Из формул: $a^2-b^2=a_1^2-b_1^2$ и $ab=a_1b_1\sin\varphi$ находим

$$\left.\begin{matrix} 5-9=(3\sqrt{5})^2-b_1^2 \\ 3\sqrt{5}=21\sqrt{5}\sin\varphi \end{matrix}\right\} \begin{matrix} b_1=7 \\ \sin\varphi=\frac{1}{7} \text{ и } \varphi=\arcsin\left(\frac{1}{7}\right). \end{matrix}$$

76. $r=\frac{\frac{5}{2}}{1+\cos\varphi}$; $e=1$ (парабола); $2p=5$, прост. ур-ие $y^2=5x$

77. Для наглядности определим задание на чертеже. Хорда $MM_1 \parallel OY$ по условию; ее длина $MM_1=AF$. Полагая $OA=x_1$ найдем:

$AF=OF-OA=\frac{p}{2}-x_1$

координаты точки $M(x_1, \sqrt{2px_1})$

" " $M_1(x_1, -\sqrt{2px_1})$

и $MM_1=\sqrt{(\sqrt{2px_1}+\sqrt{2px_1})^2}=2\sqrt{2px_1}$

Черт. 13

Но согласно условию $2\sqrt{2px_1}=\frac{p}{2}-x_1$. Решая это ур-ие, найдем $x_1=\frac{p}{2}(9\pm\sqrt{5})$. Ур-ие искомой хорды $x=\frac{p}{2}(9\pm\sqrt{5})$

78. На прилагаемом чертеже $OM=r$; $OA=x_1$; $OF=\frac{p}{2}$. Отсюда имеем $AF=\frac{p}{2}-x_1$. Согласно условию $x_1=\frac{p}{2}-x_1$; т.е. $x_1=\frac{p}{4}$ и далее ордината точки $M$

$$y_1=\sqrt{2px_1}=\sqrt{2p\cdot\frac{p}{4}}=\frac{p}{\sqrt{2}}$$

Черт. 14 Черт. 15

Но точка $M$ лежит и на окружности, следовательно $r^2=x_1^2+y_1^2$ т.е. $r^2=\frac{p^2}{16}+\frac{p^2}{2}=\frac{9}{16}p^2$; $r=\frac{3}{4}p$

79. По чертежу имеем (см. черт. 15)

$OF=\frac{p}{2}$; $O'F=c=\sqrt{a^2-b^2}$; $OO'=a$; уравнение эллипса, отнесенного к вершине $y^2=2px-\frac{p}{a}x^2$, где $p=\frac{b^2}{a}$ (*)

Подставляя значения в (*), получим $\frac{b^2}{a}=9$. Кроме того $\frac{p}{a}=0{,}36$. Значит $\frac{9}{a}=0{,}36$; $a=25$; $b^2=9\cdot25=225$

Искомое расстояние $FF_1=OF-OF_1=\frac{p}{2}-(a-c)=\frac{p}{2}-a+c=$
$=\frac{9}{2}-25\pm\sqrt{400}$, что дает 0,5 или 40,5.

## IV. Геометрия в пространстве.

80. Имеем координаты точек $D(0,b,c)$, $E(a,0,c)$, $F(0,b,0$

Общее ур-ие плоскости $Ax+By+Cz+D=0$. Подставляя координаты точки, получим систему:

$$Bb+Cc+D=0 \quad \dots (D)$$
$$Aa+Cc+D=0 \quad \dots (E)$$
$$Aa+Bb+D=0 \quad \dots (F)$$

Из (D) и (E) имеем: $A=\frac{Bb}{a}$

Из (E) и (F) ,, $C=\frac{Bb}{c}$

Подставляя в (F) получим A:

$$2Bb+D=0 \qquad D=-Bb$$

Внося эти значения в общее ур-ие плоскости будем иметь

$$\frac{Bb}{a}x+By+\frac{Bb}{c}z=2Bb$$

или $$cbx+acy+abz=2abc$$

Наконец, деля обе части на $abc$, получим ур-ие иск. плоскости

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=2$$

81. Аналогично: $S(a,b,c)$, $A(0,0,0)$, $B(0,b,0)$

Получим систему

$$Aa+Bb+Cc+D \quad (S)$$
$$Aa+D=0 \quad (A)$$
$$Bb+D=0 \quad (B)$$

Заменяя $Aa$ и $Bb$ через $-D$ из (A) и (B) и подставляя в (S) получим $D=Cc$.

Вносим эти значения в общее ур-ие плоскости

$$-\frac{D}{a}x-\frac{D}{b}y+\frac{D}{c}z+D=0$$

или

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-\frac{z}{c}=1$$

82. $\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$

83. $\frac{x}{a}=\frac{z}{c}$

84. $\frac{2abc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}$

85. $\frac{2abc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+\text{[illegible]}^2c^2}}$

86. $\arccos\frac{ab}{\sqrt{a^2+\text{[illegible]}^2}\cdot\sqrt{b^2+c^2}}$

87. Ур-ия плоскостей пишем в виде:

$$cbx+acy+abz=2abc$$
$$cbx+acy-abz=abc$$

$$\cos V=\frac{AA_1+BB_1+CC_1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\;\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}$$

в нашем случае

$$\cos V=\frac{c^2b^2-a^2c^2-a^2b^2}{\sqrt{c^2b^2+a^2c^2+a^2b^2}\;\sqrt{c^2b^2+a^2c^2+a^2b^2}}=$$
$$=\frac{c^2b^2+a^2c^2-a^2b^2}{c^2b^2+a^2c^2+a^2b^2}$$

88. Т. к. плоскость проходит через $Ox$, то в ее уравнении не будет члена с $x$, а т. к. она вместе с тем проходит через начало, то $D=0$.
Имеем: $By+Cz=0$. Подставляя координаты точки $(2,6,-5)$ получим: $6B-5C=0$; $B=\frac{5}{6}C$. Значит

$$\frac{5}{6}Cy+Cz=0 \quad \text{или} \quad 5y+6z=0$$

есть ур-ие искомой плоскости.

89.
$$\cos V=\frac{AA_1+BB_1+CC_1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}$$

Для нашего примера

$$\cos V=\frac{9\cdot8+20\cdot6-12\cdot0}{\sqrt{81+400+144}\cdot\sqrt{64+36+0}}=\frac{192}{250}=\frac{96}{125}$$

90.
$$\delta = \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{4.3 + (-3)8 + 12.1 - 13}{\sqrt{16+9+144}} = \frac{-13}{-13} = 1$$

91. Плоскость, проходящая через $OX$ представится ур-ием вида
$$By + Cz + D = 0 \quad \ldots\ldots (I)$$
Аналогично, ур-ие плоскости, проходящей через ось $OZ$ будет
$$Ax + By + D = 0 \quad \ldots\ldots (II)$$
Т.к они проходят вместе с тем через начало, то $D=0$, а из того, что они проходят через точку $(1,2,4)$, получим
$$2B + 4C = 0 \qquad \text{или} \quad B = -2C$$
Подставляя в ур-ие (I) будем иметь
$$-2y + z = 0$$
Для второй плоскости получим
$$A + 2B = 0 \quad \text{или} \quad A = -2B$$
Подставляя в ур-ие (II), имеем
$$-2x + y = 0$$
Угол между этими плоскостями будет
$$\cos V = \frac{-2.0 - 2.1 + 1\,0}{\sqrt{0+4+1}\,.\sqrt{4+1+0}} = -\frac{2}{5}$$

92. $\cos\alpha = -\frac{3}{5\sqrt{2}}$ ; $\cos\beta = \frac{4}{5\sqrt{2}}$ ; $\cos\gamma = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

93. Общее ур-ие плоскостей, проходящих через пересечение данных
$$2x - y + 3z - 2 + \lambda(y - z + 4) = 0.$$
Подставив координаты $(1,0,2)$ получим
$$2 + 6 - 2 + \lambda(-2+4) = 0$$
или
$$6 + 2\lambda = 0, \quad \lambda = -3$$
Искомое ур-ие будет
$$2x - y + 3z - 2 - 3(y - z + 4) = 0$$
или
$$2x - 4y + 6z - 14 = 0$$

94. Составив ур-ние

$$x-y+4+\lambda(2x-3y+5z)=0$$

перепишем его в виде

$$(1+2\lambda)x-(1+3\lambda)y+5\lambda z+4=0$$

Условие $\perp$ ности выразится так:

$$(1+2\lambda).1-(1+3\lambda).1+5\lambda=0$$

откуда $\lambda=0$, т.е. ур-ние искомой плоскости

$$x-y+4=0$$ (совпадают с данною плоскостью)

95. $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$

96. $\frac{x}{a}=\frac{y-b}{-b}=\frac{z}{c}$ ; $\frac{x-a}{-a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$

97.

$$\arcsin\frac{3}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}$$

98. $\arccos\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{a^2+b^2+c^2}\right)$

99. $\frac{x}{a}=\frac{2y}{b}=\frac{2z}{c}$

100. $30^\circ$

101. Возьмем плоскость, проходящую через точку $(1,0,1)$ и данную прямую

$$A(x-1)+By+C(z-1)=0$$

Из ур-ия прямой видно, что она проходит через точку $(1,-1,2)$, значит $-B+C=0$

Кроме того она проходит через точку $(3,2,6)$;(это видно, если подставить координаты точки в заданное ур-ие прямой); отсюда получим: $2A+2B+5C=0$

По предыдущему $B=C$, т.е. $2A+7B=0$; $A=-\frac{7}{2}B$.

Итак, ур-ие плоскости, проходящей через $(1,0,1)$ и нашу прямую

$$-\frac{7}{2}B(x-1)+By+B(z-1)=0$$ ;сокращая на $B$

$$7x-2y-2z-5=0$$

Найдем теперь ур-ие плоскости, проходящей через ту же точку (1,0,1) и $\perp$ к нашей прямой.

Берем ур-ие плоскости

$$A(x-1)+By+C(z-1)=0$$

Условие $\perp$-ности

$$\frac{A}{2}=\frac{B}{3}=\frac{C}{4}$$

или $A=\frac{2}{3}B$; $C=\frac{4}{3}B$.

По подстановке получим

$$\frac{2}{3}B(x-1)+By+\frac{4}{3}B(z-1)=0$$

или

$$2x+3y+4z-6=0$$

Эти два ур-ия

$$\left.\begin{array}{l} 7x-2y-2z-5=0 \\ 2x+3y+4z-6=0 \end{array}\right\}$$

и определяют искомую прямую.

102. Могут представиться следующие случаи:

1) $x=-y=-z$ 2) $x=y=-z$

3) $x=-y=z$ 4) $x=y=z$

Стало быть имеем 4 прямых линии.

103. $x^2+x+1=y^2+y+1=z^2+z+1$

или

$$\left.\begin{array}{l} x^2+x-y^2-y=0 \\ y^2-z^2+y-z=0 \end{array}\right\}$$

или

$$\left.\begin{array}{l} (x-y)(x+y+1)=0 \\ (y-z)(y+z+1)=0 \end{array}\right\}$$

Получаем 4 прямых линии

1) $x-y=0$, $y+z+1=0$

2) $y-z=0$, $x+y+1=0$

3) $x-y=0$, $y-z=0$

4) $x+y+1=0$, $y+z+1=0$

# Дифференциальное исчисление.

## Вычисление пределов.

1. 1.
2. $e^x$
3. $\frac{1}{x}\log(1+x) = \log(1+x)^{\frac{1}{x}} = lg\left(1+\frac{1}{y}\right)^y$, где $x = \frac{1}{y}$

   Пред $lg\left(1+\frac{1}{y}\right)^y = lg\, e = 1$
4. 1
5. Пусть пред $\left|\frac{a^x-1}{x}\right|_{x=0} = z$ и $\frac{a^x-1}{x} = z+\alpha$, где $\alpha$ - безк.ма

Подстановка $x=\frac{1}{y}$ даст $y(a^{\frac{1}{y}}-1) = z+\alpha$

или

$$a^{\frac{1}{y}} = 1+\frac{z+\alpha}{y}, \text{ или } a = \left(1+\frac{z+\alpha}{y}\right)^y$$

Переходя к пределам и помня, что при $x=0$, $y=\infty$, имее

$$a = \text{пред}_{y=\infty}\left|\left(1+\frac{z+\alpha}{y}\right)^y\right|$$, а т.к. $\alpha$-есть беско нечно малая, исчезающая в пределе, то

$$a = e^z, \text{ откуда } z = lg\, a$$

Итак

$$\text{пр}_{x=0}\left|\frac{a^x-1}{x}\right| = lg\, a$$

6. $\frac{2}{3}$.

7. $\text{пред}_{x=0}\left|\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}\right| = \text{пр.}_{x=0}\left|\frac{\frac{1}{2}\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}}\right| =$

$= \frac{1}{2}\,\text{пр.}\left|\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right|_{x=0}\left|\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right|_{x=0} = \frac{1}{2}$

8. Деля числителя и знаменателя на $x$

$$\left|\frac{1-\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\sin x}{x}}\right|_{x=\infty} = 1$$

Замечание. Здесь надо помнить, что $\text{пред.}_{x=\infty}\frac{\sin x}{x} = 0$, т.к. числитель $\sin x \leq 1$, а знаменатель бесконечно-большое число.

9. $\text{пр.}_{x=0}\left|e^{\frac{a-b}{x}}\right| = \begin{matrix} +\infty & \text{если } a > b \\ 0 & \text{если } a < b \end{matrix}$

Замечание. В случае $a = b$ указанный предел обращается в 1.

10. $\frac{(x+1-2)\left[(x+1)^2+2(x+1)+4\right]}{x-1} = (x+1)^2+2(x+1)+4$

$\text{пр.}_{x=1}\left[(x+1)^2+2(x+1)+4\right] = 12$

11. $\text{пр}_{x=\infty}\left|\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+4}\right| = 2$

12. $\text{пр.}_{x=\infty}\left|\frac{\sin\frac{a}{x}}{\frac{1}{x}}\right| = a\cdot\text{пр.}\left.\frac{\sin\frac{a}{x}}{\frac{a}{x}}\right|_{x=\infty} = a$

13. $\text{пр}_{x=0}\left|\frac{1-\cos x}{\sin x}\right| = \text{пр}\left|\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\right|_{x=0} = \text{пр}_{x=0}\left|\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right| =$

$= \text{пр.}_{x=0}\,\text{tg}\,\frac{x}{2} = 0$

14. $\text{пр.}_{x=0}\left|\frac{1}{x\,\text{ctg}\,x}\right| = \text{пр}_{x=0}\left|\frac{1}{x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}}\right| = \text{пр}_{x=0}\left|\frac{\sin x}{x\cos x}\right| =$

$= \text{пр}_{x=0}\left|\frac{\sin x}{x}\right|\text{пр}_{x=0}\left|\frac{1}{\cos x}\right| = 1.1 = 1.$

15.

$$\text{пр}_{x=0}\left|\frac{x}{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}\right| = \text{пр.}_{x=0}\left|\frac{x\cos x}{\sin x(1-\cos x)}\right| =$$

$$= \text{пр}_{x=0}\left|\frac{x\cos x}{\sin x\, 2\sin^2\frac{x}{2}}\right| = \frac{1}{2}\,\text{пр}_{x=0}\left|\frac{\sin x}{x}\right|\text{пр.}_{x=0}\left|\cos x\right|\text{пр}_{x=0}\left|\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\infty = \infty$$

16. $$\frac{\sin 2x}{\cos 2x}\cdot\frac{\sin(\frac{\pi}{4}-x)}{\cos(\frac{\pi}{4}-x)} = \frac{\sin 2x}{\cos 2x}\cdot\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x-\sin x)}{\cos(\frac{\pi}{4}-x)} =$$

$$= \frac{\sin 2x}{(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)}\cdot\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x-\sin x)}{\cos(\frac{\pi}{4}-x)} = \frac{\sin 2x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{(\cos x+\sin x)\cos(\frac{\pi}{4}-x)}$$

Находим искомый предел при $x=\frac{\pi}{4}$; он будет

$$= \frac{1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2})\cos 0^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

17. $$\frac{1-\sin x}{2(\frac{\pi}{2}-x)}\cdot\frac{1+\sin x}{1+\sin x} = \frac{1-\sin^2 x}{2(\frac{\pi}{2}-x)(1+\sin x)} = \frac{\cos^2 x}{2(\frac{\pi}{2}-x)(1+\sin x)}$$

Переходя к пределам, имеем:

$$\frac{1}{2}\text{пр.}_{x=\frac{\pi}{2}}\left|\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}{\frac{\pi}{2}-x}\right|\text{пр.}_{x=\frac{\pi}{2}}\left|\frac{\cos x}{1+\sin x}\right| = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{0}{2} = 0$$

18. $$2\,\text{пр.}\left|\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right|_{x=0} = 2.1 = 2.$$

19. Переводя в радиальную меру, получим $\sin x^\circ = \sin\frac{\pi x}{180}$ и далее

$$\text{пр.}\,\frac{\pi}{180}\left|\frac{\sin\frac{\pi x}{180}}{\frac{\pi x}{180}}\right|_{x=0} = \frac{\pi}{180}.$$

20. Известно, что $\operatorname{Sh} x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$

Итак, $\text{пр}_{x=0}\frac{\operatorname{sh} x}{x} = \text{пр}_{x=0}\left|\frac{e^x-e^{-x}}{2x}\right| = \text{пр}_{x=0}\left|\frac{e^{2x}-1}{2x\, e^x}\right| = 1.1$

т.к. $\text{пр.}_{x=0}\left|\frac{1}{e^x}\right| = 1$ а $\text{пр.}_{x=0}\left|\frac{e^{2x}-1}{2x}\right| = \log e = 1$ на основании задачи N 5.

21. $$\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}};$$ имеем

$$\text{пр.}_{x=0} \frac{\operatorname{th} x}{x} = \text{пр.}_{x=0} \frac{e^{-x}(e^{2x}-1)}{xe^{-x}(e^{2x}+1)} = \text{пр.}_{x=0} \frac{2(e^{2x}-1)}{2x(e^{2x}+1)} =$$

$$= \text{пр.}_{x=0} \frac{e^{2x}-1}{x} \text{пр.}_{x=0} \frac{2}{e^{2x}+1} = 1 \cdot \frac{2}{2} = 1.$$

Можно найти предел и иначе

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}; \quad \text{пред.}_{x=0} \frac{\operatorname{th}}{x} = \text{пр.}_{x=0} \frac{\operatorname{sh}}{x} \cdot \text{пр.}_{x=0} \frac{1}{\operatorname{ch} x} = 1.1 = 1$$

22. $$\text{пр.}_{x=\infty} \left| \sqrt{x+a} - \sqrt{x} \right| = \text{пр.}_{x=\infty} \left| \frac{(\sqrt{x+a} - \sqrt{x})(\sqrt{x+a} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x}} \right| =$$

$$= \text{пр.}_{x=\infty} \left| \frac{x+a-x}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x}} \right| = \text{пр.}_{x=\infty} \left| \frac{a}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x}} \right| = \frac{a}{\infty} = 0$$

23. $$\text{пр.}_{x=\infty} \left| \sqrt{x(x+a)} - x \right| = \text{пр.}_{x=\infty} \left| \frac{x(x+a) - x^2}{\sqrt{x(x+a)} + x} \right| = \text{пр}_{x=\infty} \left| \frac{ax}{\sqrt{(a+x)x} + x} \right| =$$

$$= \text{пр.}_{x=\infty} \left| \frac{a}{\sqrt{1+\frac{a}{x}} + 1} \right| = \frac{a}{2}$$

24. $$\text{пр.}_{x=\infty} \left| \sqrt{(x+a)(x+b)} - x \right| = \text{пр.}_{x=\infty} \left| \frac{(x+a)(x+b) - x^2}{\sqrt{(x+a)(x+b)} + x} \right| =$$

$$= \text{пр.} \left| \frac{(a+b)x + ab}{\sqrt{x^2 + (a+b)x + ab} + x} \right| = \text{пр.}_{x=\infty} \left| \frac{a+b+\frac{ab}{x}}{\sqrt{1 + \frac{a+b}{x} + \frac{ab}{x^2}} + 1} \right| = \frac{a+b}{2}$$

25. $$\text{пр.}_{x=0} \left| \frac{\log(1-x)}{x} \right| = z,$$ полагаем $-x = y$

$$z = \text{пр.}_{y=0} \left| \frac{\log(1+y)}{-y} \right| = -\text{пр.}_{y=0} \left| \frac{\log(1+y)}{y} \right| = -1$$ (см. зад. 3)

26. Искомый предел $= \left| \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{x(1+x^2)}{x} \right|_{x=0} = 1$

($\operatorname{arctg} \frac{x}{1+x^2}$ заменяется здесь эквивалентною ему бесконечно-малою $\frac{x}{1+x^2}$)

27. Искомый предел преобразуем так:

пр [redacted]$_{=1}\left|\frac{(1-x)2\sin\frac{\pi x}{4}\cos\frac{\pi x}{4}}{\left(\cos\frac{\pi x}{4}-\sin\frac{\pi x}{4}\right)\left(\cos\frac{\pi x}{4}+\sin\frac{\pi x}{4}\right)}\right| = 2\,$пр$_{x=1}\left|\frac{\sin\frac{\pi x}{4}\cos\frac{\pi x}{4}}{\cos\frac{\pi x}{4}+\sin\frac{\pi x}{4}}\right| \times$

$\times$ пр$_{x=1}\left|\frac{1-x}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{4}\right)-\sin\frac{\pi x}{4}}\right| = 2\cdot\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}\cdot$пр$_{x=1}\left|\frac{1-x}{2\cos\frac{\pi}{4}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi x}{4}\right)}\right| =$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}$ пр$_{x=1}\left|\frac{1-x}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi x}{4}\right)}\right|$; полагаем $\frac{\pi}{4}-\frac{\pi x}{4}=y$ или

$\frac{\pi}{4}(1-x)=y$ ; $1-x=\frac{4y}{\pi}$, поэтому пр$_{x=1}\left|\frac{1-x}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi x}{4}\right)}\right| =$

$= \frac{4}{\pi}\cdot$пр$_{y=0}\left|\frac{y}{\sin y}\right| = \frac{4}{\pi}$. Весь предел есть $\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{\pi}=\frac{2}{\pi}$.

28. пр$_{x=\frac{\pi}{4}}\left|\frac{\sin x-\cos x}{1-\frac{\sin x}{\cos x}}\right| =$ пр. $\left|\frac{(\sin x-\cos x)\cos x}{(\cos x-\sin x)}\right| = -$пр$_{x=\frac{\pi}{4}}|\cos x| =$
$= -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

29. пр$_{x=0}\left|\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{\sin^3 x}\right| =$ пр$_{x=0}\left|\frac{\sin x(1-\cos x)}{\sin^3 x.\cos x}\right| =$

$=$ пр$_{x=0}\left|\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\left(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)^2\cos x}\right| = \frac{1}{2}$ пр$_{x=0}\left|\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}\cos x}\right| = \frac{1}{2}$.

30. пр$_{x=0}\left|\frac{\sin^3 x}{x^3\left(1+\sqrt{1-\sin^3 x}\right)}\right| = \frac{1}{2}$

31. пр$_{x=0}\left|\frac{2\sin^2\frac{x}{2}+\sin x}{2\sin^2\frac{nx}{2}+\sin nx}\right| =$ пр$_{x=0}\left|\frac{2\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)}{2\sin\frac{nx}{2}\left(\sin\frac{nx}{2}+\cos\frac{nx}{2}\right)}\right| = \frac{1}{n}$

32. пр$_{n=\infty}\left|\frac{(1+n)n}{2n^2}\right| =$ пр. $\left|\frac{\frac{1}{n}+1}{2}\right|_{n=\infty} = \frac{1}{2}$.

33. Из курса алгебры известно, что
$$1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1.2.3}.$$

$$\text{пр.}_{n=\infty}\left|\frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3.1.2.3}\right| = \frac{1}{6}\text{пр.}_{n=\infty}\left|\frac{(2n+1)(n+1)}{n^2}\right| = \frac{1}{6}\text{пр.}_{n=\infty}\left|\frac{(2+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n})}{1}\right|$$
$$= \frac{1}{6}\cdot 2 = \frac{1}{3}.$$

34. $2\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2} = \sin x$ откуда $\cos\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{2\sin\frac{x}{2}}$
$2\sin\frac{x}{4}.\cos\frac{x}{4} = \sin\frac{x}{2}$ „ $\cos\frac{x}{4} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{4}}$
$2\sin\frac{x}{8}.\cos\frac{x}{8} = \sin\frac{x}{4}$ „ . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . .

$$\text{пр.}_{n=\infty} P_n = \text{пр.}\frac{\sin x}{2\sin\frac{x}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2^2}}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2^2}}{2\sin\frac{x}{2^3}}\cdots\frac{\sin\frac{x}{2^{n-1}}}{2\sin\frac{x}{2^n}} = \text{пр.}_{n=\infty}\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}} =$$
$$= \frac{\sin x}{x}\,\text{пр}_{n=\infty}\left|\frac{1}{\frac{\sin\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}}}\right| = \frac{\sin x}{x}.$$

Также можно доказать, что $\text{пр.}_{n=\infty}\, ch\frac{x}{2}\cdot ch\frac{x}{2^2}\cdot ch\frac{x}{2^3}\cdots ch\frac{x}{2^n} = \frac{sh.}{x}$

Действительно:

$$i\,sh\,x = \sin(ix),\quad ch\,x = \cos(ix)$$
или $\sin 2ix = 2\sin xi\cdot\cos xi = 2i\,sh x\,ch x = sh 2x$
(см. также №20.)

35. Имеем:

$$ctg\,x - 2ctg\,2x = tg\,x$$
$$ctg\frac{x}{2} - 2ctg\,x = tg\frac{x}{2}$$
$$ctg\frac{x}{2^2} - 2ctg\frac{x}{2} = tg\frac{x}{2^2}$$
. . . . . . . . . . .
$$ctg\frac{x}{2^n} - 2ctg\frac{x}{2^{n-1}} = tg\frac{x}{2^n}$$

Деля на соответствующие степени двух и складывая, получим, что искомый предел равен

$$\left[\frac{1}{2^n}ctg\frac{x}{2^n} - ctg\,x\right]_{n=\infty} = \frac{1}{x} - \frac{1}{tg\,x}$$

36. $$\text{пр.}_{m=\infty}\left|\cos^m\frac{x}{\sqrt{m}}\right| = \text{пр.}_{m=\infty}\left|\left(1-\sin^2\frac{x}{\sqrt{m}}\right)^{\frac{m}{2}}\right| = \text{пр}_{m=\infty}\left|\left(1-\frac{x^2}{m}\right)^{\frac{m}{2}}\right.$$

$$= \text{пр}_{z=\infty}\left|\left(1+\frac{1}{z}\right)^{-\frac{zx^2}{2}}\right| = \text{пр}_{z=\infty}\left|\left[\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}\right]^{-\frac{x^2}{2}}\right| = e^{-\frac{x^2}{2}},$$

причем $z = -\frac{m}{x^2}$

37. Т.к. $\cos^m ax = (1-\sin^2 ax)^{\frac{m}{2}}$, то искомый предел =

$$= \text{пр}_{x=0}\left|\frac{1-(1-\sin^2 ax)^{\frac{m}{2}}}{\operatorname{tg}^2 bx}\right| = \text{пр}_{x=0}\left|\frac{1-(1-a^2x^2)^{\frac{m}{2}}}{b^2x^2}\right| =$$

$$= \text{пр}_{x=0}\left|\frac{1-(1-a^2x^2)^m}{b^2x^2\left[1+(1-a^2x^2)^{\frac{m}{2}}\right]}\right| = \text{пр}_{x=0}\left|\frac{1-1+ma^2x^2-\ldots}{b^2x^2\left[1+(1-a^2x^2)^{\frac{m}{2}}\right]}\right| =$$

$$= \frac{ma^2}{2b^2}$$

## II. Функции от одной независимой переменной.

1. $y' = \frac{\sin x(1-\cos x)' - (1-\cos x)(\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x - \cos x + \cos^2 x}{\sin^2 x} =$

$= \frac{1-\cos x}{\sin^2 x} = \frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x} = 1+\cos x.$

2. $y' = \frac{(1+\sin x)'\cos x - (1+\sin x)(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin x + \sin^2 x}{\cos^2 x} =$

$= \frac{1+\sin x}{1-\sin^2 x} = \frac{1}{1+\sin x}$

3.

$y' = \frac{\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)'}{1+\frac{4x^2}{(1-x^2)^2}} = \frac{(1-x^2)2-2x(-2x)}{(1-x^2)^2+4x^2} = \frac{1+2x^2}{(1+x^2)^2}$

4.

$y' = \frac{(1-\sin 2x)'}{2\sqrt{1-\sin 2x}} = \frac{-2\cos 2x}{2\sqrt{1-\sin 2x}} = -\frac{\cos 2x}{\sqrt{1-\sin 2x}}$

5. $y' = \frac{(1+\sin 2x)'}{2\sqrt{1+\sin 2x}} = \frac{\cos 2x}{\sqrt{1+\sin 2x}}$

6. $y = \lg x^2 = 2\lg x, \quad y' = \frac{2}{x}$

7. 0.

8. $y' = \frac{(\lg^2 x)'}{\lg^2 x} = \frac{2\lg x\cdot\frac{1}{x}}{\lg^2 x} = \frac{2}{x\lg x}$

9. $y = \lg\sin x$; $y' = \frac{\cos x}{\sin x} = \mathrm{ctg}\,x$

10. $y' = x^x(1+\lg x)$ (предварительно логарифмируя).

11. $y = \frac{1}{\lg_a x}$; $y' = -\frac{(\lg_a x)'}{\lg_a^2 x} = -\frac{\frac{1}{\lg a}\cdot\frac{1}{x}}{\lg_a^2 x} = -\frac{\frac{1}{\lg a}\cdot\frac{1}{x}}{\lg_a^2 x} = -\frac{\frac{1}{x\lg a}}{\frac{\lg^2 x}{\lg^2 a}} =$

$$= -\frac{\lg^2 a}{x\lg a\,\lg^2 x} = -\frac{\lg a}{x\lg^2 x}.$$

12. $y = \frac{1}{\lg_a\sin x} = \frac{1}{\frac{\lg\sin x}{\lg a}} = \frac{\lg a}{\lg\sin x}$

$$y' = \frac{-\lg a\cdot\frac{\cos x}{\sin x}}{\lg^2\sin x} = -\frac{\mathrm{ctg}\,x\cdot\lg a}{\lg^2\sin x}$$

13. $y = \lg_a\sqrt{x} = \frac{\lg\sqrt{x}}{\lg a} = \frac{\lg x}{2\lg a}$; $y' = \frac{1}{2x\lg a}$

14. $y' = \mathrm{ctg}\,x$.

15. $y' = -\mathrm{tg}\,x$.

16. $$y' = \frac{\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)'}{1+\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}} = \frac{(1+x^2)\cdot 2-2x\cdot 2x}{(1-x^2)^2} = \pm\frac{2-2x^2}{(1-x^2)^2} =$$

$$= \pm\frac{2(1-x^2)}{(1-x^2)^2} = \pm\frac{2}{1-x^2}.$$

17. $y' = \cos(\lg x)\cdot\frac{1}{x}$.

18. $y' = -\sin(\lg x)\cdot\frac{1}{x}$.

19. $y' = e^{\arcsin x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

20. $y' = f'(a+x)$.

21. $y' = f'(a+bx^2)\cdot 2bx$.

22. $y' = -\frac{a}{x^2}f\left(\frac{a}{x}\right)$.

23. $y' = \frac{1}{x^2}\left[f'\left(\frac{x+a}{b-x}\right)\cdot\frac{(b-x)+(x+a)}{(b-x)^2}\right] + f\left(\frac{x+a}{b-x}\right)\cdot\frac{2}{x^3} =$

$= \frac{1}{x^2} \cdot f'\left(\frac{x+a}{b-x}\right) \cdot \frac{a+b}{(b-x)^2} - \frac{2}{x^3} f\left(\frac{x+a}{b-x}\right).$

24. $y' = \frac{a^2(a^2-3x^2)^2}{(a^2+x^2)^3} \cdot \frac{3(a^4+2a^2x^2+x^4)}{a(a^2-3x^2)^2} = \frac{a^2(a^2-3x^2)^2}{(a^2+x^2)^3} \cdot \frac{3(a^2+x^2)^2}{a(a^2-3x^2)} =$

$= \frac{3a}{a^2+x^2}$

25. $f\left(\frac{a}{x}\right) \cdot \varphi'(\sqrt{x^2-1}) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} + \varphi(\sqrt{x^2-1}) f'\left(\frac{a}{x}\right) \cdot \left(-\frac{a}{x^2}\right)$

26. $y' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}} \cdot \frac{\cos x(1-\sin x)+\cos x(1+\sin x)}{(1-\sin x)^2} =$

$= \frac{2\cos x}{2(1-\sin x)\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{1-\sin x}$

27. $y' = \frac{(1+x^2)^2 f'(\operatorname{arctg} x) \cdot \frac{1}{1+x^2} - 4f(\operatorname{arctg} x)(1+x^2)x}{(1+x^2)^4} =$

$= \frac{f'(\operatorname{arctg} x) - 4x f(\operatorname{arctg} x)}{(1+x^2)^3}$

28. $y' = (1+x^2) f'(\operatorname{arctg} x) \cdot \frac{1}{1+x^2} + 2x f(\operatorname{arctg} x) = f'(\operatorname{arctg} x) +$
$+ 2f(\operatorname{arctg} x).$

29. $y' = e^{f(x^2)} \cdot a^{\varphi(\sqrt{x})} \cdot \lg a \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \varphi'(x) + a^{\varphi(\sqrt{x})} \cdot e^{f(x^2)} \cdot f'(x^2) \cdot 2x$

30. $y' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} \cdot -\frac{1}{x^2} = -\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \cdot \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

31. $\frac{1}{1+x^2}$

32. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

33. $y' = \frac{1}{2(1+x^2)}$

34. $y' = f'\left(\frac{x^2+1}{x-1}\right) \cdot \frac{(x-1)2x-(x^2+1)}{(x-1)^2} + \mathcal{F}\left(\frac{1}{x}\right) \cdot -\frac{1}{x^2} =$

$= \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x^2} \mathcal{F}\left(\frac{1}{x}\right)$

35. $\cos x + 2\cos 2x + 3\cos 3x + \ldots + \ldots + n\cos nx =$

$$= \frac{\frac{n+1}{2}\sin\frac{x}{2}\sin\frac{2n+1}{2}x - \frac{1}{2}\sin^2\frac{n+1}{2}x}{\sin^2\frac{x}{2}}.$$

36. Логарифмируя и беря производные

$$\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{m} + x\right) + \cdots + \operatorname{ctg}\left(x + \frac{m-1}{m}\pi\right) = m \operatorname{ctg} mx$$

37. Предварительно выведем формулы разности arcsin и arctg; $\sin(u-v) = \sin u \cdot \cos v - \cos u \cdot \sin v$; полагая $\sin u = x$ и $\sin v = y$, имеем $u - v = \arcsin[\sin u \cdot \cos v - \cos u \cdot \sin v]$ или $\arcsin x - \arcsin y = \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right)$. Составим теперь выражение производной для $\arcsin x = y$

$$y' = \text{пр}_{h=0}\frac{\arcsin(x+h) - \arcsin x}{h} =$$

$$= \text{пр}_{h=0}\frac{x\sqrt{1+(x+h)^2} - (x+h)\sqrt{1-x^2}}{h} =$$

$$= \text{пр}_{h=0}\frac{x^2[1-(x+h)^2] - (x+h)(1-x^2)}{h\left(x\sqrt{1-(x+h)^2} + (x+h)\sqrt{1-x^2}\right)} =$$

$$= \text{пр}_{h=0}\frac{x^2 - x^2 - 2hx - h^2}{h\left(x\sqrt{1-(h+x)^2} + (x+h)\sqrt{1-x^2}\right)} =$$

$$= \text{пр}_{h=0}\frac{-2x}{x\sqrt{1+(x+h)^2} + (x+h)\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \frac{-2x}{2x\sqrt{1-x^2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Для arctg аналогично имеем $\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\frac{x}{1\ldots}$ отсюда

$$y' = \text{пр}_{h=0}\frac{\operatorname{arctg}(x+h) - \operatorname{arctg} x}{h} = \text{пр}_{h=0}\frac{\operatorname{arctg}\frac{h}{1+x^2+hx}}{h} =$$

$$= \text{пр}_{h=0}\frac{1}{1+x^2+hx} = \frac{1}{1+x^2}$$

38. Если $\sqrt{1-P^2} = Q\sqrt{1-x^2}$, то $1-P^2 = Q^2(1-x^2)$ т.е. $P$ не делится на $Q$.

$-PP' = (1-x^2)QQ' + Q\cdot -2x = Q[(1-x^2)Q' - 2x]$ т.е. $nQ = P'$
($P$ не делится на $Q$, значит $Q$ есть кратное $P'$) значит
$nQ = \frac{dP}{dx}$ или $nQdx = dP$; деля на $Q\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-P}$ получим $n\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{dP}{\sqrt{1-P^2}}$

39. (I) $dy = -\frac{1}{x^2}dx$; $y^4+1 = \frac{1+x^4}{x^4}$; (II) $\sqrt{1+y^4} = \frac{\sqrt{1+x^4}}{x^2}$
Деля (I) на (II) $\frac{dy}{\sqrt{1+y^4}} + \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = 0$ и т.д.

40. $y' = 0$ $(i = \sqrt{-1})$
41. $y' = 0$
42. $4x(x^2+3x-3)$
43. $2x(2x^2+1)$
44. $(5x+1)^2(x^2-4)^2(50x^2+6x-80)$
45. $\frac{2ab}{(ax+b)^2}$
46. $\frac{2x}{(1-x^2)^2}$
47. $\frac{-2x^2+2}{(x^2-x+1)^2}$
48. $\frac{-a}{2\sqrt{(ax+b)^3}}$
49. $\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$
50. $\frac{a^2}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}$
51. $-2xe^{-x^2}$
52. $-\frac{2}{1-x^2}$
53 $\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$
54 $\frac{1}{\cos x}$
55. $\frac{2n(\cos 2x-n)}{(1-n\cos 2x)^2}$
56. $\frac{2}{1+x^2}$

57. $\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$

58. $y=x^{-\frac{1}{2}}$ ; $y'=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$ ; $y''=\frac{1.3}{2.2}x^{-\frac{5}{2}}$ ; $y'''=-\frac{1.3.5}{2^3}x^{-\frac{7}{2}}$ .......
Подмечая общий закон, которому следуют коэффициенты и степень при $x$, находим:

$$y^{(n)}=(-1)^n\cdot\frac{1.3.5..(2n-1)}{2^n}x^{-\left(\frac{2n+1}{2}\right)}$$

59. Согласно теории, если $y=\sin x$, то $y^{(n)}=\sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2})$ ; имеем: $y'=a\sin ax$ ; $y''=-a^2\cos ax$ ; .... следовательно
$y^{(n)}=a^n\cdot\sin\left(ax+\frac{n\pi}{2}\right)$

60. $y'=\frac{1}{x+1}$ ; $y''=-\frac{1}{(x+1)^2}$ ; $y'''=\frac{1.2}{(x+1)^3}$ ..... $y^{(n)}=(-1)^{n-1}\cdot\frac{1.2.3...(n-1)}{(x+1)^n}$

61. Если $y=e^{ax}\cos bx$, то $y'=e^{ax}(a\cos bx-b\sin bx)$ ;
$y''=e^{ax}\left[a^2\cos bx-2ab\sin bx-b^2\cos bx\right]$. Подставляя в заданное ур-ие, получим:
$e^{ax}\left[a^2\cos bx-2ab\sin bx-b^2\cos bx+2ab\sin bx-2a^2\cos bx+\right.$
$\left.+a^2\cos bx+b^2\cos bx\right]=0$
Также доказывается и для $y=e^{ax}\sin bx$.

## Частные производные и полные дифференциалы.

1. $z=\log\cos x+\log\cos y$ ; $\frac{\partial z}{\partial x}=-\operatorname{tg}x$ ; $\frac{\partial z}{\partial y}=-\operatorname{tg}y$

2. $\frac{\partial u}{\partial x}=y^z(x^z)'_x=y^z z x^{z-1}$ ; $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=zx^{z-1}(y^z)'_y=z^2x^{z-1}y^{z-1}$
$\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=\left[z^2(xy)^{z-1}\right]'_z=(xy)^{z-1}\cdot 2z+z^2(xy)^{z-1}\log(xy)$

3. $\frac{\partial v}{\partial x}=e^{\sqrt{\frac{x}{y}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ; $\frac{\partial v}{\partial y}=e^{\sqrt{\frac{x}{y}}}\cdot\sqrt{x}\cdot\frac{-\frac{1}{2\sqrt{y}}}{y}=e^{\sqrt{\frac{x}{y}}}\cdot-\frac{\sqrt{x}}{2y\sqrt{y}}$

$$dv=\frac{e^{\sqrt{\frac{x}{y}}}}{2\sqrt{y}}\left[\frac{1}{\sqrt{x}}dx-\frac{\sqrt{x}}{y}dy\right]$$

4. $dz=y^2\frac{dx}{x}+2y\log x\,dy$ ; $d^2z=-y^2\frac{dx^2}{x^2}+2\lg x\,dy^2$

5. $z=\sqrt{3y^2-2x^2+5}$ ; $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2\sqrt{3y^2-2x^2+5}}\cdot-4x=-\frac{2x}{\sqrt{3y^2-2x^2}}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\cdot\partial y}=\frac{2x\cdot\frac{1}{2\sqrt{3y^2-2x^2+5}}\cdot 6y}{3y^2-2x^2+5}=\frac{6xy}{(3y^2-2x^2+5)\sqrt{3y^2-2x^2+5}}$$

6. Взяв z как функцию x и y, мы получим:

$$dz = -\frac{c^2x}{a^2z}dx - \frac{c^2y}{b^2z}dy\ ;\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{c^2(a^2z^2+c^2x^2)}{a^4z^3};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = -\frac{c^4xy}{a^2b^2z^3};\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{c^2(b^2z^2+c^2y^2)}{b^4z^3}$$ ; следовательно

$$d^2z = -\frac{c^2(a^2z^2+c^2x^2)}{a^4z^3}dx^2 - \frac{c^4xy}{a^2b^2z^3}dxdy - \frac{c^2(b^2z^2+c^2y^2)}{b^4z^3}dy^2$$

7. 0.

8. $\operatorname{arctg} 2x + \operatorname{arctg} y$ ; $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2}{1+4x^2}$ ; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+y^2}$

$$dz = \frac{2}{1+4x^2}dx + \frac{1}{1+y^2}dy$$

9. $$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\sqrt{x^2+y^2} - x\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{x^2+y^2-x^2}{\sqrt{x^2+y^2}\,(x^2+y^2)} = \frac{y^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = -\frac{y}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$dv = \frac{y}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\left[ydx - dy\right]$$

0. $$du = 3x^2dx + 3y^2dz + 6yzdy\ ;\ d^2u = 6xdx^2 + 6ydydz + $$
$$+ 6dy(ydz + zdy) = 6xdx^2 + 12ydydz + 6zdy^2;$$
$$d^3u = 6dx^3 + 12dzdy^2 + 6dy^2dz = 6dx^3 + 18dy^2dz.$$

1. (Для краткости пишем φ и ψ)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi + x\varphi' + y\psi'\ ;\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2\varphi' + x\varphi'' + y\psi''\ ;$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \varphi' + x\varphi'' + \psi'' + y\psi''\ ;\ \frac{\partial z}{\partial y} = x\varphi' + \psi + y\varphi'\ ;$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x\varphi'' + 2\psi' + y\psi''$$

Подставляем в заданное ур-ие, тогда

$$2\varphi' + x\varphi'' + y\psi'' - 2\varphi' - 2x\varphi'' - 2\psi' - 2y\psi'' + x\varphi'' + 2\psi' + y\psi'' = 0$$

12. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{3x^2-3yz}{x^3+y^3+z^3-3xyz}$ ; $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{3y^2-3xz}{x^3+y^3+z^3-3xyz}$ ;

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{3z^2-3xy}{x^3+y^3+z^3-3xyz}$$

Берем сумму частных производных

$$S=\frac{3x^2+3y^2+3z^2-3yz-3xz-3yx}{x^3+y^3+z^3-3xyz}=$$

$$=\frac{3(x^2+y^2+z^2-yz-xz-yx)}{(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-yz-xz-yx)}=\frac{3}{x+y+z}$$

Примечание. О разложении данного знаменателя на множителей см. алгебру.

13. $\frac{\partial z}{\partial x}=a\varphi'(y+ax)-a\psi'(y-ax)$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=a^2\varphi''(y+ax)+a^2\psi''(y-ax)$

$\frac{\partial z}{\partial y}=\varphi'(y+ax)+\psi'(y-ax)$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\varphi''(y+ax)+\psi''(y-ax)$

$$a^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=a^2\varphi''(y+ax)+a^2\psi''(y-ax)-a^2\varphi''(y+ax)-a^2\psi''(y-ax)=0$$

14. (См. прим. 37) $\arccos(xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2})=\arccos x+\arcsin y$

Поэтому $\frac{\partial(\arccos x+\arcsin y)}{\partial x}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\frac{\partial^2(\arccos x+\arcsin y)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial\left[-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right]}{\partial y}=0$$

15. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y^2}{(x+y)^2}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x^2}{(x+y)^2}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{2xy}{(x+y)^3}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{2y^2}{(x+y)^3}$;

$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{2x^2}{(x+y)^3}$; $d^2u=-\frac{2y^2}{(x+y)^3}dx^2+\frac{4xy}{(x+y)^3}dxdy-\frac{2x^2}{(x+y)^3}dy^2$

16. $d^3u=6(dx^3+dy^3)$

17. $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{-(x+y)[1+\cos^2(x-y)]}{\sin^3(x-y)}$

18. Применим способ непосредственного дифференцирования

$$du = 3x^2dx + 3y^2dy;$$
$$d^2u = 6x\,dx^2 + 3y^2d^2y + 6y\,dy^2;$$
$$d^3u = 6\,dx^3 + 3y^2d^3y + 6y\,d^2y\,dy + 6y\,2dy\,d^2y + 6\,dy^3 =$$
$$= 6\,dx^3 + 3y^2d^3y + 18y\,d^2y\,dy + 6\,dy^3.$$

19. $du = \cos(x+y+z)(dx+dy+dz)$

$$d^2u = -\sin(x+y+z)(dx+dy+dz)^2 + \cos(x+y+z)\,d^2z$$
$$d^3u = -\sin(x+y+z)\cdot 2(dx+dy+dz)\cdot d^2z - \cos(x+y+z)(dx+dy+dz)^3 +$$
$$+ \cos(x+y+z)\,d^3z - \sin(x+y+z)\,d^2z\,dz$$

20. $u = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y$ (см. прим. 37)

$$u'_x = \frac{1}{1+x^2}\ ;\ u'_y = \frac{1}{1+y^2}$$

21. $$u'_x = \frac{\sqrt{1+x^2+y^2}\cdot y - xy\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}}{1+x^2+y^2} = \frac{y(1+y^2)}{(1+x^2+y^2)\sqrt{1+x^2+y^2}}$$

22. $u'''_{xyz} = e^{xyz}(x^2y^2z^2 + 3xyz + 1)$

## Функции, заданные параметрически.

1. $dx = a\sin t\,dt$; $dy = a(1-\cos t)\,dt$;

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin t}{1-\cos t} = \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}} = \operatorname{ctg}\frac{t}{2}$$

Вообще

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \quad \ldots\ldots (I)$$ в случае параметрического задания функций.

Дифференцируя (I), найдем

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y'' = \frac{\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{dt}{dx} - \frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dt}{dx}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} = \frac{\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}$$

Эту формулу сокращенно можно написать так:

$$y'' = \frac{x'_t\,y''_t - y'_t\,x''_t}{(x'_t)^3}$$

Для нашего примера:

$x'_t = a\sin t$ ; $x''_t = a\cos t$

$y'_t = a(1-\cos t)$; $y''_t = a\sin t$

$$y'' = \frac{a\sin t . a\sin t - a(1-\cos t)a\cos t}{a^3\sin^3 t} = \frac{a^2(1-\cos t)}{a^3\sin^3 t} = \frac{1-\cos t}{a\sin^3 t}$$

2. $x'_t = \frac{2(1+t)-2t}{(1+t)^2} = \frac{1}{(1+t)^2}$

$$y'_t = \frac{(1+t).-1-(1-t)}{(1+t)^2} = \frac{-2.}{(1+t)^2}$$

$$y' = \frac{y'_t}{x'_t} = -2$$

3. $\left.\begin{array}{l} x'_\varphi = -a\sin\varphi \\ y'_\varphi = b\cos\varphi \end{array}\right\} y' = -\frac{b}{a}\operatorname{ctg}\varphi$

$\left.\begin{array}{l} x''_\varphi = -a\cos\varphi \\ y''_\varphi = -b\sin\varphi \end{array}\right\} y'' = \frac{-a\sin\varphi \cdot -b\sin\varphi + a\cos\varphi \cdot b\cos\varphi}{-a^3\sin^3\varphi} = -\frac{b}{a^2\sin^3\varphi}$

4. $\left.\begin{array}{l} x'_\varphi = -a\,\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi} \\ y'_\varphi = \frac{b}{\cos^2\varphi} \end{array}\right\} y' = -\frac{b}{a}\sin\varphi$

$$x''_\varphi = -a\left[\frac{\cos^3\varphi + 2\sin^2\varphi\cos\varphi}{\cos^4\varphi}\right] = \frac{-a(\cos^2\varphi + 2\sin^2\varphi)}{\cos^3\varphi}$$

$$y''_\varphi = b \cdot \frac{2\cos\varphi . \sin\varphi}{\cos^4\varphi} = \frac{2b . \sin\varphi}{\cos^3\varphi}$$

$$y'' = -\frac{2b\sin\varphi}{a(\cos^2\varphi + 2\sin^2\varphi)}$$

5. $x'_t = \frac{(1+t^3)3a - 3at \cdot 3t^2}{(1+3t^3)^2} = \frac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}$

$$y'_t = \frac{(1+t^3).6at - 3at^2.3t^2}{(1+t^3)^2} = \frac{6at - 3at^4}{(1+t^3)^2} = \frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2}$$

$$y' = \frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$$

6. См. „Дифференциальное Исчисление" пример 31.

$y'_t = \frac{1}{1+t^2}$ ; $x'_t = \frac{1}{1+t^2}$ ; $y' = 1$.

7. $x'_t = \cos t + t\sin t - \cos t = t\sin t$

$y'_t = -\sin t - t\cos t - \sin t = -(2\sin t + t\cos t)$

$y' = -\dfrac{2\sin t + t\cos t}{t\sin t}$

8. $x'_t = 4t^3 - 6t^2 - 2t + 4 = 2(2t^3 - 3t - t + 2)$

$y'_t = 4t^3 + 6t^2 - 2t + 4 = 2(2t^3 + 3t - t + 2)$

при $x = y = 0$ , $t = -1$ ; $y'_t = 12$ ; $x'_t = 0$ ; $y' = \frac{12}{0} = \infty$

9. $x'_t = 3m\sin^2 t\cos t$

$y'_t = -3n\cos^2 t\sin t$

$y' = -\dfrac{n\cos^2 t\sin t}{m\sin^2 t\cos t} = -\dfrac{n}{m}\operatorname{ctg} t$

10. $\left.\begin{aligned} x'_t &= 2t \\ y'_t &= 2 \end{aligned}\right\} y' = \dfrac{1}{t}$

## V Функции, заданные неявно.

1. $y' = e^y + xe^y \cdot y'$

$y' = \dfrac{e^y}{1 - xe^y} = \dfrac{e^y}{1 - y + 1} = \dfrac{e^y}{2 - y}$

2 $ny^{n-1}y' = \dfrac{(x-y)(1+y') - (x+y)(1-y')}{(x-y)^2} = \dfrac{2xy' - 2y}{(x-y)^2}$

$$y' = -\frac{2y}{ny^{n-1}(x-y)^2 - 2x} = -\frac{2y^2}{ny^n(x-y)^2 - 2xy} =$$

$$= -\frac{2y^2}{n \cdot \frac{x+y}{x-y}(x-y)^2 - 2xy} = -\frac{2y^2}{n(x^2-y^2) - 2xy} =$$

$$= \frac{2y^2}{n(y^2 - x^2) + 2xy}$$

3. $(y-1)e^{\frac{x^2}{2}}x + e^{\frac{x^2}{2}} \cdot y' = 0$

$y' = -\dfrac{(y-1)e^{\frac{x^2}{2}}x}{e^{\frac{x^2}{2}}} = -(y-1)e^{\frac{x^2}{2}} = -a.$

4. $3x^2+2xyy'+y^2-2ax+2ayy'=0$

$$y'=\frac{2ax-3x^2-y^2}{2y(x+a)}=\frac{2x(a-x)-(x^2+y^2)}{2y(x+a)}$$

Переписав заданное ур-ие так:

$$x^3+xy^2-ax^2+ay^2=0$$

находим, сгруппировав члены

$$x^2(x-a)+y^2(x+a)=0$$

или

$$\frac{x^2}{y^2}=-\frac{x+a}{x-a}=\frac{x+a}{a-x}$$

$$\frac{x}{y}=\sqrt{\frac{x+a}{a-x}}\ .$$

$$\text{пр}_{\substack{x=0\\y=0}}\left|\frac{x}{y}\right|=\text{пр}_{\substack{x=0\\y=0}}\sqrt{\frac{x+a}{x-a}}=\pm1\ \dots(A)$$

Наша производная имеет неопределенное значение при $x=0$, $y=0$, поэтому находим:

$$\text{пр}_{\substack{x=0\\y=0}}(y')=\text{пр}_{\substack{x=0\\y=0}}\frac{2x(a-x)-(x^2+y^2)}{2y(x+a)}=$$

$$=\text{пр}_{\substack{x=0\\y=0}}\frac{x}{y}\cdot\text{пр}_{\substack{x=0\\y=0}}\frac{a-x}{x+a}-\frac{1}{2}\text{пр}_{\substack{x=0\\y=0}}x\cdot\text{пр}_{\substack{x=0\\y=0}}\frac{x}{y}\cdot\text{пр}_{\substack{x=0\\y=0}}\frac{1}{x+a}-\frac{1}{2}\text{пр}_{\substack{x=0\\y=0}}\frac{y}{x+a}$$

На основании равенства (A) получаем:

$$\text{пр}_{\substack{x=0\\y=0}}(y')=\pm1\cdot1-\frac{1}{2}\cdot0\cdot\pm1\cdot\frac{1}{a}-\frac{1}{2}\cdot0=\pm1$$

5. $\sin y+x\cos y\cdot y'+\sin y\cdot y'-2\sin 2y\cdot y'=0$

$$y'=-\frac{\sin y}{x\cos y+\sin y-2\sin 2y}=\frac{\sin y}{2\sin 2y-\sin y-x\cos y}$$

6. $y\cos x+\sin x\cdot y'+\sin(x-y)(1-y')=0$

$$y'=\frac{-y\cos x-\sin(x-y)}{\sin x-\sin(x-y)}$$

7. $\left.\begin{array}{l}14x\,dx+4y\,dy+6z\,dz=0\ \dots(\text{I})\\ 8x\,dx+4y\,dy+4z\,dz=0\dots(\text{II})\end{array}\right\}\dots\ 6x\,dx+2z\,dz=0\dots(*$

Выражение (*) получается вычитанием (II) из (I).

Значит
$$\frac{dz}{dx} = -\frac{3x}{z}$$

При $x=1$, $z=2$; $\frac{dz}{dx} = -\frac{3}{2}$

Дифференцируем еще раз выражение (*)

$3dx^2 + dz^2 + z\,d^2z = 0$

Но $\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = \frac{9}{4}$; $\frac{dz}{dx} = \frac{9}{4}dx^2$; следовательно

$\left(3+\frac{9}{4}\right)dx^2 = -z\,d^2z$, откуда

$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{21}{8}$

Аналогично, исключая из ур-ия (I) и (II) $dz$, а затем дифференцируя еще раз, найдем $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx}$

8. $xdx + ydy - zdz = 0$ ... (I) умножаем на 3 $3xdx+3ydy-3zdz=0$ +
$xdx + 2ydy + 3zdz = 0$... (II) складываем $xdx+2ydy+3zdz=0$
$4xdx+5ydy = 0$ ... (*)

откуда
$$dy = -\frac{4}{5y}xdx$$

Дифференцируем (*)
$$4dx^2 + 5y\,d^2y + 5dy^2 = 0$$

Но
$$(dy)^2 = \frac{16}{25y^2}x^2(dx)^2,$$

следовательно
$$\left(4+\frac{16x^2}{25y^2}\right)dx^2 = -5y\,d^2y$$

и
$$d^2y = \left(\frac{100y^2+16x^2}{125y^3}\right)dx^2.$$

Аналогично находим и $d^2z$.

9. $2xdx + 2ydy - 4zdz = 0$ ... (I)
$xdx + 2ydy + zdz = 0$ ... (II)

$xdx - 5zdz = 0$ ....... (*)

$$\frac{dz}{dx}=\frac{x}{5z}=\frac{1}{5} \quad \text{при } x=z=1$$

Дифференцируем (*)

$$dx^2-5\,dz^2-5z\,d^2z=0$$

$$dz^2=\frac{1}{25}\,dx^2,$$

следовательно

$$dx^2\left(1-\frac{1}{5}\right)=5z\,d^2z$$

и

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{\frac{4}{5}}{5z}=\frac{4}{25} \quad \text{при } z=1$$

10. Имеем:

$$z=(x+\alpha)(y-\varphi\alpha)$$

$$z'_x=(y-\varphi\alpha);\quad z'_y=x+\alpha$$

$$z'_x\cdot z'_y=(y-\varphi\alpha)(x+\alpha)=z$$

11. Если

$$(z-\varphi\alpha)^2=x^2(y^2-\alpha^2)$$

$$(z-\varphi\alpha)\,\varphi'_\alpha=\alpha x^2,$$

то $(z-\varphi\alpha)\,z'_x=(y^2-\alpha^2)x$

$$(z-\varphi\alpha)\,z'_y=x^2y$$

$$(z-\varphi\alpha)^2\cdot z'_x\cdot z'_y=(y^2-\alpha^2)\,x^3y$$

или

$$z'_x\cdot z'_y=xy$$

12.

$$y+xy'=\frac{e^{xy}+e^{-xy}}{e^{xy}+e^{-xy}}=\frac{e^{xy}(y+xy')-e^{-xy}(y+xy')}{e^{xy}+e^{-xy}}$$

Общий множитель $(y+xy')$ обращает обе части ур-ия в нуль при

$$y'=-\frac{y}{x}$$

13. $y'=\sqrt{\frac{2a}{y}-1}\;;\quad y''=-\frac{a}{y^2}$

14. Предварительно логарифмируем: $x\lg y=y\lg x$

$$\lg y + \frac{xy'}{y} = \frac{y}{x} + \log x\, y'$$

$$y'\left(\frac{x}{y} - \lg x\right) = \frac{y}{x} - \lg y$$

$$y' = \frac{\frac{y - x\lg y}{x}}{\frac{x - y\lg x}{y}} = \frac{y^2(1-\lg x)}{x^2(1-\lg y)}$$

15. $$y' = -\frac{x^2 - ay}{y^2 - ax}$$

$$y'' = \frac{2a(y^2-ax)(ay-x^2) - 2x(y^2-ax)^2 - 2y(ay-x^2)^2}{(y^2-ax)^2}$$

16. $$y' = \frac{x-2y}{2x-y}$$

Дифференцируя ур-ие $x - 2yy' - 2y + yy' = 0$ найдем

$$yy'' + y'^2 + 2y' - 1 = 0$$

что дает

$$y'' = -\frac{\left(\frac{x-2y}{2x-y}\right)^2 + 2\left(\frac{x-2y}{2x-y}\right) - 1}{y}$$

(Остается сделать преобразование).

17. $\cos y \cdot y' = n\cos x$ ; $y' = \frac{n\cos x}{\cos y} = \frac{n\cos x}{\sqrt{1-n^2\sin^2 x}}$

18. $\lg(x^2+y^2) = 2\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$

$$\frac{x+yy'}{x^2+y^2} = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{xy'-y}{x^2} = \frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{xy'-y}{x^2}$$

или

$$x + yy' = xy' - y$$

откуда

$$y' = \frac{x+y}{x-y}$$

Аналогично примеру 16 находим и $y''$.

# VI. Ряды.

1. В известной формуле:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \ldots$$

полагаем $x^2 = y$, тогда

$$\frac{1}{\sqrt{1-y}} = 1 + \frac{1}{2}y + \frac{1.3}{2.4}y^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}y^3 + \ldots$$

Полагая же $y = 0{,}1$, мы и найдем искомую сумму:

$$1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{10}\right) + \frac{1.3}{2.4}\left(\frac{1}{10}\right)^2 + \ldots = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}1}}$$

2. Простое применение формулы бинома Ньютона дает, что сумма

$$= \left(1 + \frac{1}{2}\right)^{-10}$$

3. Тоже формулою бинома Ньютона

$$S = \left(1 + \frac{2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$S = \left(1 + \frac{4}{5}\right)^{-3}$$

5. По формуле

$$\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{1}{5} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots$$

получим, полагая $x = \frac{1}{5}$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3 + \ldots = \frac{1}{2}\lg\left(\frac{1+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}\right) = \frac{1}{2}\lg\frac{3}{2}$$

6. $\lg(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots$

Полагая $x = \frac{1}{3}$, найдем

$$-\lg\frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \ldots$$

7. $S = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots$ или $xS = x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots$

Вычитая $2^{ое}$ из $1^{го}$, найдем

$$S(1-x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots = \frac{1}{1-x}$$

откуда

$$S = \frac{1}{(1-x)^2}$$

8. $$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots\ldots$$

Полагая $x = \lg 10$, получим

$$1 + \frac{\lg 10}{1} + \frac{\lg^2 10}{1.2} + \frac{\lg^3 10}{1.2.3} + \ldots\ldots = e^{\lg 10} = 10$$

9. $S = e^{\lg 10^{-1}} = 10^{-1} = 0{,}1$

10. См. задачу 6.

$$S = -\lg\frac{4}{5}$$

11. $1 + x + \frac{x^2}{1.2} - \frac{3x^4}{1.2.3.4} - \frac{8x^5}{1.2.3.4.5} + \ldots\ldots$

12. $1 + x + \frac{2x^2}{1.2} + \frac{4x^3}{1.2.3} + \frac{12x^4}{1.2.3.4} + \frac{35x^5}{1.2.3.4.5} + \ldots\ldots$

13. $S = \sqrt{2}\left(1 + \frac{1.x}{4.1} + \frac{3.x^2}{4^2.1.2} + \frac{7x^3}{4^3.1.2.3} + \frac{9}{4^4}\cdot\frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots\ldots\right)$

14. $S = e\left(1 + x + \frac{2x^2}{1.2} + \frac{5x^3}{1.2.3} + \frac{15x^4}{1.2.3.4} + \frac{52x^5}{1.2.3.4.5} + \ldots\ldots\right)$

15. $\lg\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right)$

Подставляя

$$x = \frac{1}{2n+1}$$

получим требуемое равенство.

## VII Maxima et minima.

$y' = 3x^2 - 12x + 9$; полагая $y' = 0$, находим

$3x^2 - 12x + 9 = 0$ или $x^2 - 4x + 3 = 0$; $x_1 = 3$, $x_2 = 1$

$y'' = 6x - 12$; при $x_1 = 3$, $y'' > 0$, значит имеется minimum

при $x_2 = 1$ $y'' < 0$ „ здесь maximum.

2. $$y' = \frac{\lg x - 1}{\lg^2 x} \;;\quad \text{при } y' = 0 \;;\; x = e$$

Числитель $\lg(e+\varepsilon) - 1 > 0$ и $\log(e-\varepsilon) - 1 < 0$,

где $\varepsilon$ - бесконечно-малое.

Т.к. знаменатель, при этом, всегда $> 0$, то очевидно имеем minimum.

3. $$y' = x^x(1 + \log x).$$

Решаем ур-ие

$$x^x(1 + \lg x) = 0$$

Т.к. $x^x \neq 0$, то

$$1 + \lg x = 0$$

откуда

$$x = \frac{1}{e}.$$

$$y'' = (1+\lg x)^2 x^x + x^x \cdot \frac{1}{x} \;;\quad \text{при } x = \frac{1}{e} \;;\; y'' = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{e}} > 0$$

то есть имеем minimum.

4. $$y' = e^x - 2\sin x - e^{-x}$$

Уравнение $y' = 0$ удовлетворяется значением $x = 0$

$$y'' = e^x - 2\cos x + e^{-x} \;;\quad \text{при } x = 0 \;;\; y'' = 0$$

$$y''' = e^x + 2\sin x - e^{-x} \;;\quad \text{при } x = 0 \;;\; y''' = 0$$

$$y^{IV} = e^x + 2\cos x + e^{-x} \;;\quad \text{при } x = 0 \;;\; y^{IV} > 0$$

значит имеем minimum.

5. $$y' = 3x^2 - 6x + 3 \;;\quad y' = 0 \text{ при } x = 1$$

$$y'' = 6x - 6 \;;\qquad \text{при } x = 1,\; y'' = 0$$

$$y''' = 6 \neq 0 \;;\quad \text{значит при } x = 1 \text{ нет ни max. ни min.}$$

1. См. задачу № 3 „Приложения дифференц. исч. к геометрии

## VII. Относительные maxima и minima.

7. $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 9$ ; $\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 9x$

Уравнения:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0\end{aligned}\right\} \text{ дают } \begin{aligned}x=0 \\ y=0\end{aligned} \text{ и } \begin{aligned}x=3 \\ y=0\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= 6x \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= -9 \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= 6y\end{aligned}\right\} \text{ при } x=0; y=0 \quad \begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} &= -9 \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= 0\end{aligned}$$

Должно быть

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} > \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y}\right)^2$$

но это неравенство не выполняется при $x=y=0$, значит нет ни max. ни min.

Значения $x=y=3$ дают

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 18 \;;\; \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -9 \;;\; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 18 .$$

Неравенство выполняется, причем $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} > 0$

значит имеем minimum.

8.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 z^3 (a - 2x - y - z)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = xyz^3 (2a - 2x - 3y - 2z)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = xy^2 z^3 (3a - 3x - 3y - 4z)$$

Кроме очевидного решения $x=y=z=0$, не дающего ни max ни min. находим $x = \frac{a}{7}$ ; $y = \frac{2a}{7}$ ; $z = \frac{3a}{7}$

и

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -3xyz^3 \;;\; \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -4xy^2z^2 \;;\; \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -y^2 z^3$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = -2xyz^3 ; \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = -3x^2 z^2$$

Согласно теории должно быть:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}\right)^2<\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2\right]\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}\right)^2\right]$$

По подстановке наших значений, приходим к

$$x(4z-3y)^2<y(6x-y)(8z-9x)$$

которое при $x=\frac{a}{7}$; $y=\frac{2a}{7}$; $z=\frac{3a}{7}$ удовлетворяется; т.к.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2};\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\ \text{и}\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}<0$$

то имеем maximum.

9.

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}&=y(x+y-1)+xy\\ \frac{\partial u}{\partial y}&=x(x+y-1)+xy\end{aligned}\right\}\ \text{Ур-ия}\ \frac{\partial u}{\partial x}=0\ \text{и}\ \frac{\partial u}{\partial y}=0\ \text{дают}\ \left\{\begin{aligned}&1)\ x=y=0\\ &2)\ x=y=\tfrac{1}{3}\\ &3)\ x=1,\ y=0\\ &4)\ x=0,\ y=1\end{aligned}\right.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2y;\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=2(x+y)-1;\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2x$$

Для 1, 3 и 4^ой^ систем решений

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2>\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial^2 y}$$

Значит нет ни max. ни min.

Для 2^ой^ же системы, $x=y=\frac{1}{3}$, неравенство (см. задачу 7) выполняется, и мы имеем minimum, т.к.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ \text{и}\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}>0$$

10.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2xe^{-x^2-y^2}(3-3x^2-2y^2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=2ye^{-x^2-y^2}(2-3x^2-2y^2)$$

Приравняв нулю производные, найдем решения:

1) $x=y=0$; 2) $x=0,\ y=1$; 3) $x=0,\ y=-1$; 4) $x=1,\ y=0$ и 5) $x=-1,\ y=0$

Далее имеем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=e^{-x^2-y^2}(6-30x^2-4y^2+12x^4+8x^2y^2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -12xye^{-x^2-y^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{-x^2-y^2}(4-6x^2-20y^2+12x^2y^2+8y^4)$$

Неравенство

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} > \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2$$

выполняется при $x = y = 0$; т.к. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} > 0$, то имеем minimum.

Для значений $x = 1, y = 0$ и $x = 1, y = 0$ неравенство тоже удовлетворяется, но те же вторые производные $< 0$, то есть имеем maximum.

Для значений $x = 0, y = 1$ и $x = 0, y = -1$ неравенство не выполняется и, значит, нет ни max. ни min.

11. Составляем частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3; \frac{\partial z}{\partial y} = 2y; \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2; \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$$

Составляем выражение

$$D = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2$$

Система

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \text{ и } \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

дает

$$x = y = 0;$$

но тогда и

$$D = 0.$$

Значит придется обратиться к производным высших порядков (Строка Тейлора для функции 2 независимых переменных). Составляем эти производные:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 12x^2; \frac{\partial^3 z}{\partial^2 x \partial y} = 0; \frac{\partial^3 z}{\partial^2 y dx} = 0; \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = 0$$

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = 24x; \frac{\partial^4 z}{\partial^3 x \partial y} = 0; \frac{\partial^4 z}{\partial^2 x \partial^2 y} = 0; \frac{\partial^4 z}{\partial x \partial y^3} = 0; \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = 0.$$

Пользуясь строкой Тэйлора и подставляя значения производных, мы найдем, что

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x_0^4} + 3\frac{\partial^2 z}{\partial y_0^2}\left(\frac{k}{h}\right)^2 = 0 + 3.2 > 0 \quad \text{(остальные произв.=0)}$$

Следовательно, мы имеем minimum.

(Более подробно см. Бертран, стр. 498.

12. Т.к.

$$f = x_1.x_2 \ldots x_n$$

и

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n - a = 0$$

то можем искать вместо $f$ maximum функции:

$$\varphi = x_1 x_2 \ldots x_n - \lambda(x_1 + x_2 + \ldots + x_n - a)$$

где $\lambda$ - новый параметр.

Беря частные производные по $x_1$, $x_2$ и приравнивая их нулю, мы получим следующую систему:

(1) $x_2 x_3 \ldots x_n - \lambda = 0$

(2) $x_1 x_3 \ldots x_n - \lambda = 0$

. . . . . . . . . . .

(n) $x_1 \cdot x_2 \ldots x_{n-1} - \lambda = 0$

Умножаем ур-ия по порядку на $x_1, x_2, \ldots x_n$, получим:

$f = x_1\lambda$; $f = x_2\lambda, \ldots f = \lambda x_n$

откуда

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n$$

На основании условия

$$nx_1 = a \quad \text{и} \quad x_1 = \frac{a}{n}$$

Итак,

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{a}{n}$$

Так как имеем max., то должно быть

$$x_1 \cdot x_2 \ldots x_n < \left(\frac{a}{n}\right)^n$$

Отсюда, между прочим находим:

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} < \frac{a}{n}$$

но

$$\frac{a}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{1 + 1 + \ldots + 1} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

то есть

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} < \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$$

(Среднее геометрическое меньше среднего арифметического)

13. $z=\pi-x-y$ ; $\sin z=\sin(x+y)$

Итак, ищем maximum функции $f=\sin x \cdot \sin y \cdot \sin(x+y)$

$\frac{\partial f}{\partial x}=\sin y \cdot \sin(2x+y)$ ; $\frac{\partial f}{\partial y}=\sin x \cdot \sin(x+2y)$

Система

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial f}{\partial y}=0$$

дает

$$\sin(2x+y)=0 \quad \text{и} \quad \sin(x+2y)=0$$

(Решение $\sin x=0$ и $\sin y=0$ отбрасываем, т.к. в $\Delta$-ке нет углов равных нулю или $\pi$)

Отсюда имеем $x=\frac{\pi}{3}$, $y=\frac{\pi}{3}$

а тогда и $z=\frac{\pi}{3}$, т.е. $\Delta$ равноугольный.

Далее находим

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2\sin y \cdot \cos(2x+y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=\sin(2x+2y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2\sin x \cos(x+2y)$$

Подставляя значения $x=\frac{\pi}{3}$, $y=\frac{\pi}{3}$, найдем, что неравенство

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} > \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2$$

удовлетворяется, а т.к. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}<0$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}<0$, то имеем maximum.

7. Положим $x=\rho\cos\theta$ и $y=\rho\sin\theta$, тогда

$$1 \leqq \rho^2 \leqq 2$$

Взяв неравенство

$$1 \leqq x^2+y^2 \leqq 2$$

прибавим к каждой части по

$$(x+y)^2 = \rho^2(\cos^2\theta + \sin 2\theta + \sin^2\theta) = \rho^2 + \rho^2 \sin 2\theta$$

и дадим $\rho$ крайние значения, т.е. 1 и $\sqrt{2}$. Мы найдем

$$1+1+\sin 2\theta \leqq f \leqq 2+2+2\sin\theta$$

или

$$2\left(1+\frac{\sin 2\theta}{2}\right) \leqq f \leqq 4\left(1+\frac{\sin 2\theta}{2}\right)$$

Взявши для $\sin 2\theta$ его крайние значения $(-1 \leqq \sin 2\theta \leqq 1)$, мы найдем

$$2\left(1-\frac{1}{2}\right) \leqq f \leqq 4\left(1+\frac{1}{2}\right)$$

или

$$1 \leqq f \leqq 6$$

Minimum $f=1$ при $2\theta = \frac{3\pi}{2}$ и $\rho^2=1$, причем $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}; y=+\frac{\sqrt{2}}{2}$

Maximum $f=6$ „ $2\theta = \frac{\pi}{2}$ „ $\rho^2=2$, „ $x=y=1$

## IX Раскрытие неопределенностей.

1, } См. задачи № 8 и № 9 в отделе „Пределы". Правило
2. } Лопиталя здесь неприменимо.

3. Условимся для краткости означать числитель через $\varphi(x)$, знаменатель через $\psi(x)$. Тогда

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \frac{-3x+3x^2}{2(x^2-1)x} \quad \text{но} \quad \frac{\varphi'(1)}{\psi'(1)} = \frac{0}{0}$$

$$\frac{\varphi''(x)}{\psi''(x)} = \frac{-3+9x^2}{2[(x^2-1)+x\cdot 2x]}; \quad \frac{\varphi''(1)}{\psi''(1)} = \frac{3}{2}$$

Это же видно, представляя дробь в виде

$$\frac{(x-1)^2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{(x-1)^2} = x+\frac{1}{2}$$

что при $x=1$ дает $\frac{3}{2}$.

4. Вид $\infty-\infty$. Сводим прежде к виду $\frac{0}{0}$. Приводим к об-

щему знаменателю

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{-2x^3+3x^2-1}{(1-x^2)(1-x^3)};\quad \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}\Big|_{x=1}=\frac{0}{0}$$

$$\frac{\varphi''(x)}{\psi''(x)}=\frac{-12x+6}{8x^3+9x^2-5};\quad \frac{\varphi''(1)}{\psi''(1)}=-\frac{6}{12}=-\frac{1}{2}.$$

5. $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}=\frac{\frac{1}{x}}{nx^{n-1}};\quad \frac{\varphi'(1)}{\psi'(1)}=\frac{1}{n}$

6. $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}=\frac{\frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}}{2(x-1)};\quad \frac{\varphi'(1)}{\psi'(1)}=\frac{0}{0}$ находим

$$\frac{\varphi''(x)}{\psi''(x)}=\frac{\frac{\pi}{2}\cdot -\frac{1}{\sin^2\frac{\pi x}{2}}\cdot\frac{\pi}{2}}{2};\quad \frac{\varphi''(1)}{\psi''(1)}=-\frac{\pi^2}{8}$$

7. $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}=\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x};\quad \frac{\varphi'(0)}{\psi'(0)}=2$

8. $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}=\frac{2x-\sin 2x}{4x^3};\quad \frac{\varphi''(x)}{\psi''(x)}=\frac{2-2\cos x}{12x^2};\quad \frac{\varphi'''(x)}{\psi'''(x)}=\frac{-4\sin 2x}{24x}$

$$\frac{\varphi^{IV}(x)}{\psi^{IV}(x)}=\frac{-2.2.2\cos 2x}{24};\quad \frac{\varphi^{IV}(0)}{\psi^{IV}(0)}=-\frac{1}{3}$$

9. $\frac{\varphi'''(x)}{\psi'''(x)}=\frac{-x\sin x+2\cos x}{-x\sin x+3\cos x};\quad \frac{\varphi'''(0)}{\psi'''(0)}=\frac{2}{3}$

10. $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}=\frac{\frac{1}{x}}{nx^{n-1}}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{x^n};\quad \frac{\varphi'(\infty)}{\psi'(\infty)}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\infty}=0$

11. Сперва логарифмируем. Пусть $x^x=A$

$x\log x=\log A$; $\log A=\frac{\log x}{x^{-1}}$ (чтобы свести к виду $\frac{\infty}{\infty}$)

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}=\frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}};\quad \frac{\varphi'(0)}{\psi'(0)}=0$$

Итак $\log A=0$, т.е. $A=1$.

# X Приложения дифференциального исчисления к геометрии.

1. Если $x_0 = 0$, то $y_0 = -3$

$$y' = 3x^2 + 4x - 4 \quad ; \quad y'_0 = -4$$

Подставив эти значения в общее ур-ие касательной

$$Y - y = y'(X - x)$$

получим

$$Y + 3 = -4(X - 0)$$

или

$$4X + Y + 3 = 0$$

2. Здесь неизвестною является точка касания $(x, y)$.

Имеем

$$2yy' = 7 \quad \text{или} \quad y' = \frac{7}{2y}$$

$$Y - y = \frac{7}{2y}(X - x)$$

Подставляем координаты точки $(-1, 3)$

$$3 - y = \frac{7}{2y}(-1 - x)$$

или

$$6y - 2y^2 = -7 - 7x$$

или

$$y^2 - 6y - 7 = 0 \quad (\text{из соотношения } y^2 = 7x)$$

откуда

$$y = 3 \pm 4$$

$$y_1 = 7 \ ; \ y_2 = -1 \ ; \ x_1 = 7 \ ; \ x_2 = \frac{1}{7}$$

(из $y^2 = 7x$)

Имеем две точки касания: $(7, 7)$ и $(\frac{1}{7}, -1)$

Ур-ия касательных будут:

1) $Y - 7 = \frac{1}{2}(X - 7)$

2) $Y + 1 = -\frac{7}{2}(X - \frac{1}{7})$



Черт. 16.

3. Чтобы показать, что параболы (I) $y^2=2px+p^2$ и (II) $y^2=-2qx+q^2$ пересекаются под углом в 90°, надо показать, что касательные, проведенные через точки пересечения парабол взаимно перпендикулярны. Находим сперва точки пересечения парабол.

Из ур-ия (I) и (II) имеем:

$$0=2x(p+q)+(p^2-q^2)$$

или

$$x=\frac{q^2-p^2}{2(p+q)}=\frac{q-p}{2}$$

Подставляя в одно из ур-ий (I) или (II)

$$y^2=p(q-p)+p^2=pq$$

Значит

$$y=\pm\sqrt{pq}$$

Далее находим

$$yy'=p\ (\text{из (I)}) \qquad yy'=-q\ (\text{из (II)})$$

$$y'=\frac{p}{y} \qquad y'=-\frac{q}{y}$$

уравнения касательных будут:

к первой параболе

$$Y-\sqrt{pq}=\frac{p}{\sqrt{pq}}\left(X-\frac{q-p}{2}\right)$$

ко второй параболе

$$Y-\sqrt{pq}=-\frac{q}{\sqrt{pq}}\left(X-\frac{q-p}{2}\right)$$

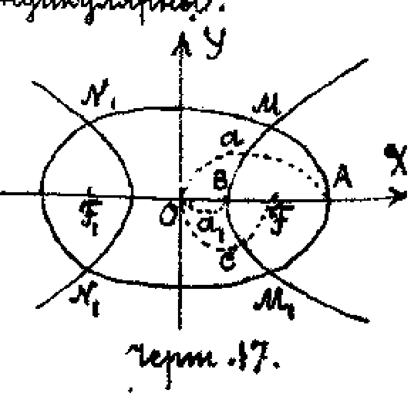
Произведение угловых коэффициентов

$$\frac{p}{\sqrt{pq}}\cdot-\frac{q}{\sqrt{pq}}=-\frac{pq}{pq}=-1$$

Значит касательные взаимно перпендикулярны.

1. Обратимся прежде всего к чертежу; $OF=c$ (фокусное расстояние); $OA=a$ (полуось эллипса); $OB=a_1$ (полуось гиперболы).

Надо показать, что касательные в точке $M$ к эллипсу и ги-



Черт. 17.

перболе взаимно $\perp$-ны. Пусть ур-ия этих кривых:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{и} \quad \frac{x^2}{a_1^2}-\frac{y^2}{b_1^2}=1$$

Для эллипса $\qquad a^2-b^2=c^2$; т.е. $b^2=a^2-c^2$

Для гиперболы $\qquad a_1^2+b_1^2=c^2$; т.е. $b_1^2=c^2-a_1^2$

Значит ур-ия перепишутся так:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1\ ;\quad \frac{x^2}{a_1^2}-\frac{y^2}{c^2-a_1^2}=1$$

или

$$(\mathrm{I})\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y}{a^2-c^2}=1\ ;\quad \frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{a_1^2-c^2}=1\quad (\mathrm{II})$$

Отличие ур-ия (II) от (I) состоит в том, что $a^2-c^2>0$, а $a_1^2-c^2<0$ как это видно из чертежа 13. Решая эти ур-ия, найдем

$$x^2=\frac{\begin{vmatrix} a^2 & -a^2(a^2-c^2) \\ a_1^2 & -a_1^2(a_1^2-c^2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a^2-c^2 & a^2 \\ a_1^2-c^2 & a_1^2 \end{vmatrix}}=\frac{a^2a_1^2}{c^2}$$

или

$$x=\pm\frac{aa_1}{c}$$

Подставляя в одно из ур-ий (I) или (II), найдем

$$y^2=\frac{(a^2-c^2)(c-a_1^2)}{c^2}$$

то есть

$$y=\pm\frac{\sqrt{(a^2-c^2)(c^2-a_1^2)}}{c}$$

Находим производные

$$y'=-\frac{b^2x}{ya^2}=-\frac{(a^2-c^2).aa_1}{c.a^2.\frac{\sqrt{(a^2-c^2)(c^2-a_1^2)}}{c}}=$$

$$=-\frac{(a^2-c^2)a_1}{a\sqrt{(a^2-c^2)(c^2-a_1^2)}}$$

Из 2-го ур-ия находим

$$y'=-\frac{(a_1^2-c^2)a}{a_1\sqrt{(a^2-c^2)(c^2-a_1^2)}}$$

Произведение угловых коэффициентов

$$\frac{(a^2-c^2)(a_1^2-c^2)aa_1}{aa_1(a^2-c^2)(c^2-a_1^2)}=-1$$

т. е. софокусные эллипс и гипербола пересекаются под прямым углом.

## Построение кривых.

1. Из ур-ия $y = \sin x$, находим

$$y' = \cos x;\ y'' = -\sin x$$

Ур-ие $y'' = -\sin x = 0$ дает точки перегиба $x = k\pi$, $y = 0$

При $0 \leqq x \leqq \pi$; $y > 0$; $y'' < 0$ } т.е. кривая вогнута к $+OX$,
а при $\pi \leqq x \leqq 2\pi$; $y < 0$; $y'' > 0$ }

С другой стороны ур-ие $y' = \cos x = 0$ дает $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$; по подстановке во 2-ую производную

$$y'' = -\sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$$

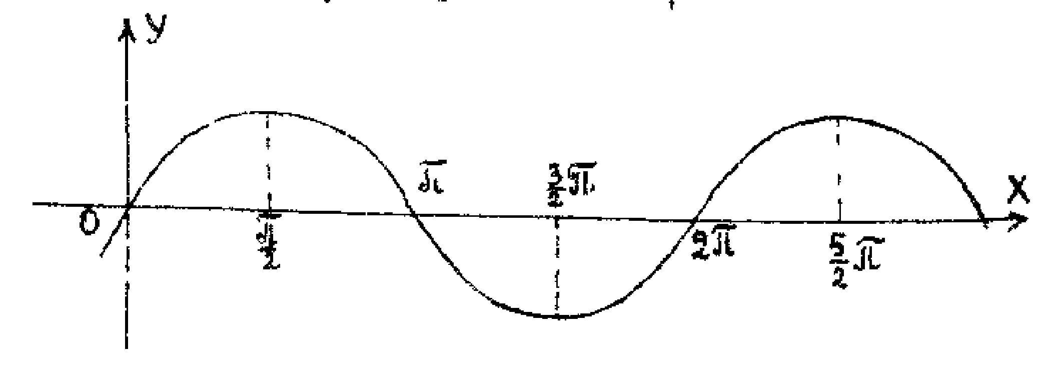
Когда $k$ - четное, то $y'' < 0$ имеем maximum

" $k$ - нечетное, у $y'' > 0$ имеем minimum

Составляем таблицу

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ |
| $y$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 1 maximum | 0 | -1 minimum |

Кривая имеет вид, показанный на чертеже:




Черт. 18.

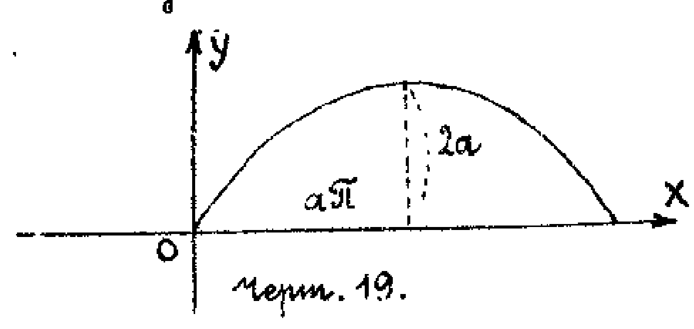
2. Имеем

$$y' = \sqrt{\frac{2a}{y} - 1};\quad y'' = -\frac{a}{y^2}$$

Если

$$y' = 0,\ \text{то}\ y = 2a$$

При этом $y''<0$, значит имеем maximum. Из ур-ия кривой находим, что в этом случае $x = a\pi$. Кривая вогнута к OX и имеет вид




черт. 19.

5. Находим:

$$(y^2-ax)y'+x^2-ay=0$$

или

$$y'=-\frac{x^2-ay}{y^2-ax}$$

Если $y'=0$, то $x^2-ay=0$. Подставляя в заданное ур-ие, получим

$$x=a\sqrt[3]{2}\ ;\ y=a\sqrt[3]{4}$$

или же

$$x=y=0$$

В первом случае

$$y''=-\frac{2}{a}$$

показывая на maximum ординаты $(a>0)$

Система же $x=y=0$ обращает $y'$ в $\frac{0}{0}$. Поэтому составляем дифференциальное ур-ие 2^{го} порядка

$$(y^2-ax)y''+2y(y')^2-2y'+2x=0$$

Отсюда $y'=0$ (при $x=y=0$)

Но то же ур-ие дает $y''=\frac{0}{0}$.

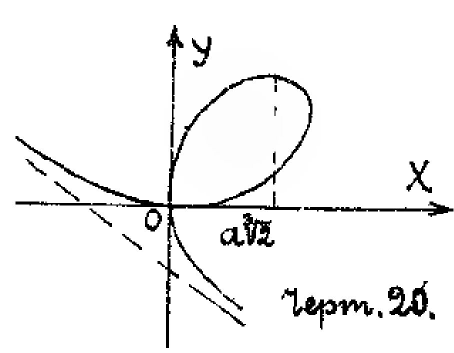
Берем ур-ие

$$(y^2-ax)y'''+(6yy'-3a)y''+2y'^3+2=0$$

Оно дает $y''=\frac{2}{3a}$

и показывает minimum ординаты, в начале координат.

Вид кривой см. черт. 20 на след. стр.



Черт. 20.

4. Перемена знака у $x$ не влияет на $y$ и кривая расположена симметрично относительно $OY$. Когда $x=0$, то $y=a$ величине параметра. $Y$ возрастает с возрастанием $x$

$$y'=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)\ \ldots\ldots\ (I)$$

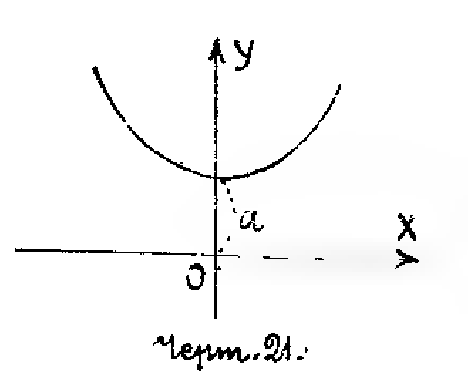
В точке $(0,a)$ есть касательная $\parallel$-ая $OX$. Делим заданное ур-ие на $a$ и возводим в квадрат. Из полученного таким образом ур-ия вычитаем (I) также возведенное в квадрат. Получается

$$\frac{y^2}{a^2}-y'^2=1\ ;\ \ y'=\frac{\sqrt{y^2-a^2}}{a}$$

Дифференцируя еще раз, получим:

$$y''=\frac{yy'}{a\sqrt{y^2-a^2}}=\frac{y}{a^2}$$

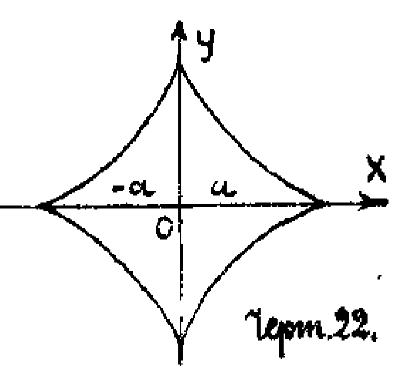
Т.к. $y>0$ и $a^2>0$, то $y''>0$ и кривая обращена вогнутостью к $OY$. В точке $(0,a)$ - перегиб. Кривая изображена на чертеже 21.



Черт. 21.

$$y'=-\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{3}};\quad y''=\frac{a^{\frac{2}{3}}}{3x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}}$$

При $y=0$, $x=\pm a$; кривая симметрична относительно $x$ и $Y$. При $y'=0$ будет $y=0$, но подставляя в $y''$ это значение, имеем $y''=\infty$, значит нет касательных $\parallel$-ых $OX$; т.к. везде, где



Черт. 22.

$y>0$ и $y''>0$, то кривая обращена выпуклостью к $+OY$, а где $y<0$ и $y''<0$, то есть кривая выпукла к $+OY$. Кроме того, кривая убывает, если $x$ и $y$ одного знака, в противном случае она возрастает (см. черт. 2 )

6. Замечаем, что ур-нию удовлетворяет $x=0$, $y=0$. Находим $y'$:

$$y' = -\frac{x(x^2+y^2-a^2)}{y(x^2+y^2-a^2)}$$

Если $y'=0$, то

$$x(x^2+y^2-a^2)=0$$

Значит, или $x=0$, или $x^2+y^2-a=0$

Но при $x=y=0$ имеем $y'=\frac{0}{0}$, т.е. в этой точке нет касательных ||-ых OX. Точка (0,0) особенная (кратная); в ней сходятся 2 ветви кривой. Находим $y''$:

$$y'' = -\frac{\{y(x^2+y^2+a^2)[(x^2+y^2-a^2)+2x(x+yy')]-x(x^2+y^2-a^2)[(x^2+y^2-a^2)y'+2y(x+yy')]\}}{y^2(x^2+y^2+a^2)}$$

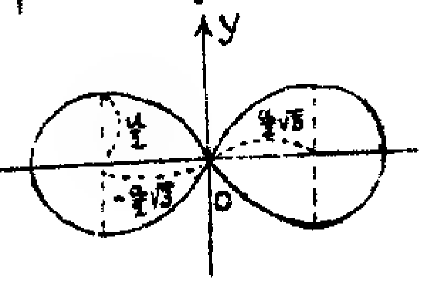
При $x=y=0$, $y''=\frac{0}{0}$, если же $x^2+y^2=a^2$, то

$$y'' = -\frac{y2a^2 2x(x+yy')}{y^2\cdot 2a^2} = \frac{-2x^2}{y}$$

Т.к. $2x^2>0$, то при $y>0$, $y''<0$, кривая выпукла к $+OY$ и имеет maximum. Если же $y<0$, то $y''>0$ кривая вогнута и имеет minimum. Подставляя в заданное ур-ие $x^2+y^2=a^2$, находим:

$$x^2-y^2=\frac{a^2}{2};$$

решая оба ур-ия совместно, находим $x=\pm a\sqrt{3}$; $y=\pm\frac{a}{2}$.



Черт. 23

## Особенные точки.

1. $$f(x,y) = ay^2 - x^2(x+a) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -x^2 - 2x(x+a); \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2ay \quad (2)$$

Решая ур-ия $\frac{\partial f}{\partial x}=0$ и $\frac{\partial f}{\partial y}=0$ находим систему:

1) $x=0,\ y=0$ и 2) $x=-a,\ y=0$

Составляем еще 2-ые производные

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -4x - 2(x+a); \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y} = 2a$$

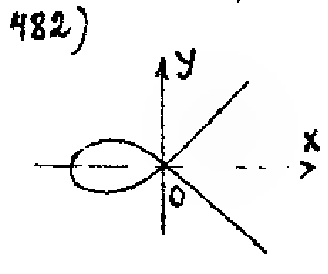
Положим сперва $a>0$, тогда

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 - 2a\cdot(-2)\cdot a > 0 \quad \ldots\ldots (*)$$

то есть имеем кратную точку, а т.к. самые низшие члены ур-ия (1) 2-го порядка, то имеем двойную точку (0,0). Значения 2-ой системы решений ($x=-a,\ y=0$) не дают особенной точки, хотя при этом и $\frac{\partial f}{\partial x}=0$ и $\frac{\partial f}{\partial y}=0$, но по исключении $y$ из ур. (1) мы придем к ур-ию

$$x^2(x+a)=0$$

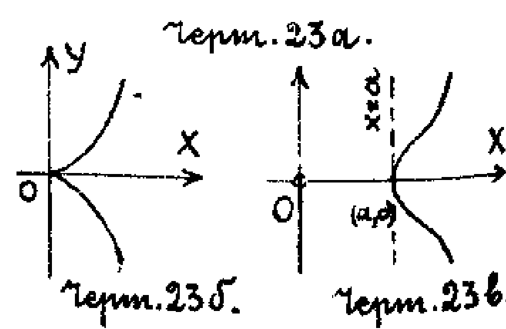
где $x=0$ будет корень двукратный, а $x=-a$ однократный, а такой корень не может давать особенной точки. Заданная кривая имеет вид, указанный на чертеже 23а (Более подробно см. Бертран, стр. 482)



черт. 23а.

Положим теперь $a=0$. Тогда $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ т.е. мы имеем точку возврата. Кривая изобр. на черт. 23б. Ось OX служит касательной к обеим ветвям кривой в точке (0,0).

Пусть, наконец, $a<0$, тогда выражение $(*)<0$ и мы имеем в начале координат уединенную (изолированную) точку (см. черт. 23в) двойную.



черт. 23б. черт. 23в.

2. $$\frac{\partial f}{\partial x}=4\left[x(x^2+y^2)-a^2x\right]=0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=4\left[y(x^2+y^2)+a^2y\right]=0$$
Корни уравнений $x=0$ ; $y=0$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=4\left[x^2+y^2+2x\right]-a^2$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x.\partial y}=4(2xy)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=4\left[x^2+y^2+2y+a^2\right]$$
Выражение
$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x.\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}>0$$
т.е. имеем двойную точку в начале координат (см. черт. 23а)

3. $$\frac{\partial f}{\partial x}=4x^3-2a^2x=0\ ;\ \frac{\partial f}{\partial y}=4y^3-2a^2y=0$$
Корни 1) $x=y=0$ и 2) $x=y=\frac{a}{\sqrt{2}}$

Вторая система не дает особенной точки, т.к. по исключении $y$ из заданного ур-ия мы не имеем кратных корней. Остается рассмотреть 1^ю систему:
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0\ ;\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-2a^2;\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2a^2$$
Поэтому
$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x.\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0-4a^4<0$$
то есть имеем изолированную точку (двойную) в начале координат. Вид кривой удобнее исследовать в полярных координатах. Полагая $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$, мы получим:
$$\rho^4(\cos^4\theta+\sin^4\theta)-a^2\rho^2=0$$
или
$$\rho^4\left[(\cos^2\theta+\sin^2\theta)-\frac{\sin^2 2\theta}{2}\right]-a^2\rho^2=0$$
Имеем, во-первых, $\rho^2=0$ (это и дает изолированную точку), сокращая же на $\rho^2$, получим, во-вторых:

$$\rho^2 = \frac{2a^2}{2 - \sin^2 2\theta} = \frac{2a^2}{1+\cos^2 2\theta}$$

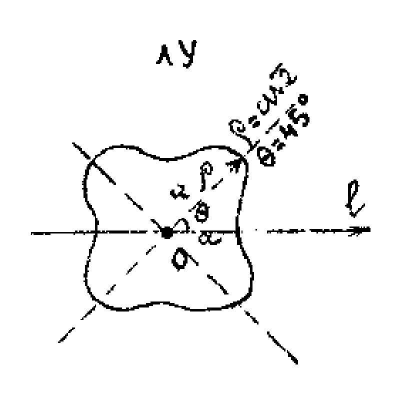
или

$$\rho = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{1+\cos^2 2\theta}}$$

Выписав значения:

| $\theta$ | $0$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{3\pi}{4}$ |
|---|---|---|---|---|
| $\rho$ | $a$ | $a\sqrt{2}$ | $a$ | $a\sqrt{2}$ |

строим кривую, имеющую вид как на чертеже 24.




Черт. 24.

4. Точка (0,0) возврата $1^{го}$ рода. Кривая схожа с кривою, показанною на черт. 23 б.
5. Двойная точка (0.0), см. черт. 20.

## Построение кривых.

$$y' = 3(x+1)^2 x^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}(x+1)^3 = \frac{(x+1)^2(11x+2)}{3x^{\frac{1}{3}}}$$

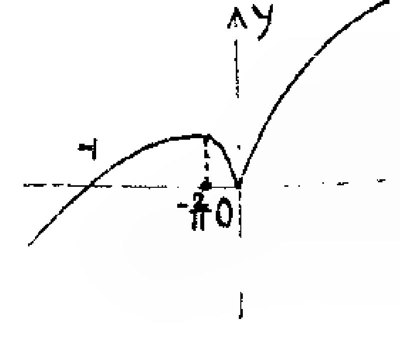
$$y'' = \frac{1}{3}\cdot\frac{(33x^2+48x+15)x^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}(11x^3+24x^2+15x+2)x^{-\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}} =$$

$$= \frac{88x^3+120x^2+30x-2}{9x^{\frac{4}{3}}}$$

$y' = 0$ при $x = -1$ и $x = -\frac{2}{11}$; при $x = 0$ $y'' = \infty$

| x | $-\infty$ | $-1$ | $-\frac{2}{11}$ | $0$ |
|---|---|---|---|---|
| y | $-\infty$ | $0$ возр. | $\frac{1}{2}$ | $0$ |
| y' | $+$ | $0$ | $0$ | $\infty$ |
| y'' | | $0$ | $<0$ max. | $\infty$ острие |

Здесь, в точке (-1,0) нет перегиба, хотя $y''=0$. Кривая изображена на чертеже 25.




Черт. 25.

Имеем $y_1 = \pm(1+x)\sqrt{x}$

$$y' = \sqrt{x} + \frac{1+x}{2\sqrt{x}} = \frac{3x+1}{2\sqrt{x}}$$

$$y'' = \frac{2\sqrt{x}\cdot 3 - (3x+1)\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}}{4x} = \frac{3x-1}{4x\sqrt{x}}$$

Решаем: $y''=0$, $x = \frac{1}{3}$ (перегиб)

$y'=0$, $x = -\frac{1}{3}$

Составляем $f(-\frac{1}{3}+h)<0$; $f(-\frac{1}{3}-h)<0$

т.е. нет ни max. ни min.

| $x$ | $0$ | $\frac{1}{3}$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $y$ | $0$ | $\frac{4\sqrt{3}}{9}$ | $\pm 2$ |
| $y'$ | $\infty$ кас. ∥ OY | $>0$ возр. | $>0$ возр. |
| $y''$ | $-\infty$ вып. к OY | $=0$ перегиб | $>0$ вогн. к OY |

Черт. 26.

Кривая см. черт. 26. Точка $(-1,0)$ изолированная.

$y = a^x$ ; $y' = a^x \lg a$ ; $y'' = a^x(\lg a)^2$

$y' = 0$ при $x = -\infty$ ; $y'' = 0$ при $x = -\infty$

| $x$ | $-\infty$ ... возрастает | | до $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $y$ | $0$ | „ | до $+\infty$ |
| $y'$ | $0$ | $>0$ | $>0$ |
| $y''$ | $0$ | $>0$ | $>0$ |

Кривая на черт. 27. Ось OX служит асимптотою.

черт. 27.

4.

$y = \frac{1}{x(x+1)}$ ; $y' = \frac{-2x-1}{x^2(x+1)^2}$ ; при $\circ$ $y'=0$ ; $x = \frac{1}{2}$

$$y'' = \frac{x^2(x+1)^2\cdot -2 + (2x+1)(4x^3+6x^2+2x)}{x^4(1+x)^4} = \frac{2(3x^2+3x+1)}{x^3(x+1)^3}$$

| $x$ | $\infty$ ... | $5$ ... | $4$ ... | $1$ ... | $\frac{1}{2}$ ... | $0$ ... | $-1$ ... | $-2$ ... | $-3$ ... | $-\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $0$ ... | $\frac{1}{30}$ .. | $\frac{1}{20}$ .. | $\frac{1}{2}$ ... | $\frac{4}{3}$ ... | $\infty$ ... | $\infty$ ... | $\frac{1}{2}$ ... | $\frac{1}{6}$ ... | $0$ |
| $y'$ | | | | | $0$ ... | $-\infty$ ... | $\infty$ ... | $>0$ | — | — |
| $y''$ | | | | | $>0$ min | $\infty$ .. | $\infty$ ... | | | |

Кривая изображена на чертеже 28.

Черт. 28.

5. Представим ур-ие в виде

$$y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6x\ ;$$

$$y' = 3x^2 - 12x + 11\ ;$$

$$y'' = 6x - 12\ ;$$

$y' = 0$ при $x = 2 \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$

$y'' = 0$ при $x = 2$

при $x = 2 + \sqrt{\frac{1}{3}}$ $y'' > 0$ minimum

при $x = 2 - \sqrt{\frac{1}{3}}$ $y'' < 0$ maximum

Составляем таблицу значений $x$, $y$, $y'$ и $y''$

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $1$ | $2-\sqrt{\frac{1}{3}}$ | $2$ | $2+\sqrt{\frac{1}{3}}$ | $3$ | $\infty$ |
| $y$ | $-\infty$ | $-6$ | $0$ | $\frac{3}{8}$ | $0$ | $-\frac{3}{8}$ | $0$ | |
| $y'$ | $\infty$ | $>0$ возр. | $>0$ возр. | $0$ | $<0$ уб. | $0$ | $>0$ возр. | |
| $y''$ | $\infty$ | $<0$ выпукл. | $<0$ вып. | $<0$ max. | $0$ перегиб | $>0$ min | $>0$ вогн. | |

Кривая см. черт. 29.

Черт. 29.

6.

$$y = \frac{(a-x)b^2}{a^2+x^2}\ ; \quad y' = \frac{-(a^2+x^2)b^2 - (a-x)b^2 2x}{(a^2+x^2)^2} =$$

$$= \frac{-a^2b^2 - x^2b^2 - 2ab^2x + 2b^2x^2}{(a^2+x^2)^2} = \frac{b^2x^2 - 2ab^2x - a^2b^2}{(a^2+x^2)^2}$$

$$y'' = \frac{(a^2+x^2)^2(2b^2x - 2ab^2) - (b^2x^2 - 2ab^2x - a^2b^2)\cdot 2(a^2+x^2)2x}{(a^2+x^2)^4} =$$

$$= \frac{2b^2(a^2+x^2)(x-a) - 4xb^2(x-a)^2}{(a^2+x^2)^3} =$$

$$= \frac{2b^2(x-a)\left[(a^2+x^2) - 2x(x-a)\right]}{(a^2+x^2)^3} = \frac{2b^2(x-a)(a^2+2ax-x^2)}{(a^2+x^2)^3}$$

Решая ур-ие $y'' = 0$ находим: $x - a = 0$ ; $x = a$

и $x^2 - 2ax - a = 0$ ; $x = -a \pm a\sqrt{2}$

В точке $(a, 0)$ перегиб, также как и в двух других точках.

7.
$$y' = x^x(1+\lg x)$$
$$y'' = (1+\lg x)^2 x^x + x^{x-1}$$

при $x=1$

$$y' = 1 \;;\; y'' = 2$$
$$\rho = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''} = \frac{2^{3/2}}{2} = \sqrt{2}$$

8.
$$dr = 2t\,dt \quad (\text{I})$$
$$d\theta = dt \quad (\text{II})$$

Деля (I) на (II) получим:

$$\frac{dr}{d\theta} = r' = 2t$$
$$r'' = \frac{\theta'_t r''_t - r'_t \cdot \theta''_t}{(\theta'_t)^3} = \frac{1.2}{1} = 2$$

т.к. $\theta'_t = 1 \;;\; r''_t = 2 \;;\; \theta''_t = 0$

$$\rho = \frac{(r+r'^2)^{3/2}}{r^2+2r'^2-rr''} = \frac{(t^2+4t^2)^{3/2}}{t^4+8t^2-t^2.2} = \frac{(5t^2)^{3/2}}{t^4+6t^2} = \frac{t^3\sqrt{125}}{t^2(t^2+6)}$$

при $t=1$ ; $\rho = \frac{5\sqrt{5}}{7}$

9.
$$r' = a\sin\theta \;;\; r'' = a\cos\theta$$
$$\rho = \frac{a^3(2-2\cos\theta)^{3/2}}{3a^2(1-\cos\theta)} = \frac{4}{3}a\sin\frac{\theta}{2}$$

## Эволюта.

10.
$$y' = \frac{p}{y} \;;\; y'' = -\frac{p^2}{y^3}$$

Уравнения центра кривизны:

$$x-\xi = \frac{1+y'^2}{y''}y' \;;\; y-\eta = -\frac{1+y'^2}{y''}$$
$$x-\xi = -\frac{y^2}{p} - p \;;\; y-\eta = \frac{y^3}{p^2}$$

Заменяя $y^2$ через $2px$, получим:

$$3x = \xi - p \;;\; y = -p^{2/3}\eta^{1/3}$$

Подставляя в уравнение параболы

$$p^{4/3}.\eta^{2/3} = \frac{2p}{3}(\xi - p)$$

$$\eta^2 = \frac{8}{27p}(\xi - p)^3$$

Перенося начало в точку $A(\xi = p\ ;\ \eta = 0)$, получим

$$\eta_1 = \pm \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3p}}\,\xi_1^{3/2}$$

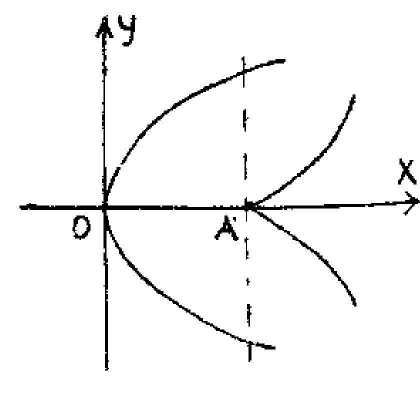
Кривая симметрична относительно $\xi_1$

$$\eta_1' = \pm\sqrt{\frac{2}{3p}}\,\xi_1^{1/2}$$

т.е. касательная в точке $A$ совпадает с $OX$

$$\eta_1'' = \pm\sqrt{\frac{1}{6p}}\cdot\xi_1^{-\frac{1}{2}}$$

что указывает на выпуклость кривой к $OX$. Кривая наз полукубической параболой (см. черт. 30.)



Черт. 30.

11. Ур-не эволюты эллипса

$$\frac{\alpha^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{\frac{(a^2+b^2)^2}{a}}} + \frac{\beta^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{\frac{(a^2-b^2)^2}{b}}} = 1$$

12.
$$X = a(t - \sin t) + 2a\sin t = a(t - \sin\theta)$$
$$Y = a(1-\cos t) - 2a(1-\cos t) = -a(1-\cos\theta)$$

Эволюта циклоиды есть также циклоида.

13. Т.к. длина полярной нормали $n = \sqrt{r^2 + r'^2}$, то

$$\rho = \frac{\sqrt{r^2+r'^2}}{r^2+2r'^2+rr''} = \frac{n\,(r^2+r'^2)}{r^2+2r'^2+rr''}$$

Значит нужно показать, что

$$\frac{r^2+r'^2}{r^2+2r'^2+rr''} = \frac{1}{k}$$

или

$$kr^2 + kr'^2 = r^2 + 2r'^2 - rr''$$

или, после приведения

$$r^2(k-1) + r'^2(k-2) = -rr''\ ..\ (I).$$

Согласно условию

$$r = a\sqrt[k-1]{\sin(k-1)\theta}$$

откуда

$$r' = a\sin^{\frac{2-K}{K-1}}(K-1)\theta\cos(K-1)\theta$$

$$r'' = a\left[(2-K)\cos^2(K-1)\theta\cdot\sin^{\frac{3-2K}{K-1}}(K-1)\theta - \sin^{\frac{1}{K-1}}(K-1)\theta\cdot(K-1)\right]$$

начит

$$rr'' = -a^2\left\{(K-2)\cos^2(K-1)\theta\sin^{\frac{4-2K}{K-1}}(K-1)\theta + (K-1)\sin^{\frac{2}{K-1}}(K-1)\theta\right\}$$

ставим теперь левую часть равенства (I)

$$(K-1)r^2 + (K-2)r'^2 = a^2(K-1)\sin^{\frac{2}{K-1}}(K-1)\theta + a^2(K-2)\sin^{\frac{4-2K}{K-1}}(K-1)\theta\cos^2(K-1)\theta =$$
$$= a^2\left\{(K-1)\sin^{\frac{2}{K-1}}(K-1)\theta + (K-2)\sin^{\frac{4-2K}{K-1}}(K-1)\theta\cos^2(K-1)\theta\right\}$$

Значит, действительно $\rho = \frac{1}{K}n$.

Частный случай: положим $K=3$, тогда

$$r^2 = a^2\sin 2\theta$$

$$r = \frac{1}{3}n \qquad \text{(лемниската)}$$

. Уравнение циклоиды:

$$x = a(t-\sin t)\ ;\ y = a(1-\cos t)$$

При $t=0$, $x=0$, $y=2a$.

Пишем ур-ие циклоиды в виде:

$$x = \arccos\frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay-y^2}$$

Тогда

$$y' = \sqrt{\frac{2a}{y}-1}\ ;\ y'' = -\frac{a}{y^2}\ \cdots\cdots (*)$$

При $y=2a$, $y'_{\text{ц}}=0$, $y''_{\text{ц}} = -\frac{1}{4a}$

Написав (*) в виде $y^2y'' = -a$, находим

$$2y'y'' + yy''' = 0$$

При данных значениях $y'=0$, значит и

$$y''' = 0$$

Далее имеем:

$$(y'')^2 + y'y''' + yy^{IV} + y'''y' = 0$$

При данных значениях $y'=0$ и $y'''=0$, но $y^{IV} = -\frac{1}{4a} \neq 0$

Значит
$$y^{IV} = -\frac{(y'')^2}{y} \neq 0$$
Итак, для циклоиды имеем:
$$y'_{ц}=0 \; ; \; y''_{ц} = -\frac{1}{4a} \; ; \; y'''_{ц} = 0 \; ; \; y^{IV}_{ц} \neq 0$$
Обращаемся к ур-ию параболы. Имеем:
$$2(x - a\pi) + 8ay' = 0$$
$$y' = -\frac{x - a\pi}{4a} \quad \text{при } x = a\pi, \; y'_{n} = 0$$
Далее находим
$$2 + 8ay'' = 0 \; ; \; y''_{n} = -\frac{1}{4a} \; ; \; y'''_{n} = 0 \; ; \; y^{IV}_{n} = 0$$
Сравнивая значения производных, мы видим, что
$$y'_{ц} = y'_{n} \; ; \; y''_{ц} = y''_{n} \; ; \; y'''_{ц} = y'''_{n}$$
но
$$y^{IV}_{ц} \neq y^{IV}_{n}$$
Значит соприкосновение будет 3^{го} порядка.

15.
$$\frac{\partial F}{\partial x} = -f'(a^x + my)\, a^x \lg a$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = 1 - f'(a^x + my).m$$
Ур-ие касательной плоскости
$$-a^x \lg a\, f'(a^x + my)(X - x) + [1 - f'(a^x + my).m](Y - y) - 2z(Z - z) = 0$$

16. Если $y=0$, то $x=1$, $z=1$. Взяв $t$ за независимое переменное, положим $y=t$, $x=e^{t^2}$, $z=e^{\sin t}$
Составляем значения производных по $t$:
$$y' = 1 \qquad x'_0 = 2te^{t^2}\Big|_{t=0} = 0 \qquad z' = \cos t\, e^{\sin t}\Big|_{t=0} = 1$$
$$y'' = 0 \qquad x''_0 = 4t^2e^{t^2} + e^{t^2}.2\Big|_{t=0} = 2 \qquad z'' = -\sin t . e^{\sin t} + \cos^2 t . e^{\sin t}\Big|_{t=0}$$
Подставляем эти значения в ур-ие:
$$(X - x)(z''y' - z'y'') + (Y - y)(x''z' - z''x') + (Z - z)(y''x' - x''y') = 0$$
получим
$$(X - 1)1 + 2Y - 2(Z - 1) = 0 \quad \text{или} \quad X + 2Y - 2Z + 1 = 0.$$

Обозначив левую часть ур-ия через $\varphi$, имеем:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{(x-z).2x-(x^2+y)}{(x-z)^2}f'\left(\frac{x^2+y}{x-z}\right)-\frac{1}{x^2}F'\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{1}{x-z}f'\left(\frac{x^2+y}{x-z}\right)-2y$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\frac{-(x^2+y).-1}{(x-z)^2}f'\left(\frac{x^2+y}{x-z}\right)=\frac{x^2+y}{(x-z)^2}f\left(\frac{x^2+y}{x-z}\right)$$

Искомое ур-ие есть

$$\left[\frac{(x-z)2x+(x^2+y)}{(x-z)^2}f'\left(\frac{x^2+y}{x-z}\right)-\frac{1}{x^2}F'\left(\frac{1}{x}\right)\right](X-x)+\left[\frac{x^2+y}{(x-z)^2}f'\left(\frac{x^2+y}{x-z}\right)\right](Z-z)+$$
$$+\left[\frac{-1}{x-z}f'\left(\frac{x^2+y}{x-z}\right)-2y\right](Y-y)=0.$$

. Обозначив $\varphi=x^2+y^2-3z^2-x^2z^2=0$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=2x-2xz^2;\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=2y;\quad \frac{\partial\varphi}{\partial z}=-6z-2x^2z$$

Ур-ие касательной плоскости:

$$(2x-2xz^2)(X-x)+2y(Y-y)-(6z+2x^2z)(Z-z)=0$$

При $x=1$, $z=\frac{1}{2}$ получим $y=0$, то есть

$$\frac{7}{4}(X-1)-4\left(Z-\frac{1}{2}\right)=0$$

после упрощений

$$7X-16Z+1=0$$

Ур-ие же нормали будет

$$\frac{4,X-1)}{7}-\frac{Z-\frac{1}{2}}{4}=0$$

Принимаем $x$ за независимую переменную и составляем производные

$$\left.\begin{aligned}z'&=ae^x-y'\\2y'-3z'&=2x\end{aligned}\right\}\text{откуда}\quad y'=\frac{3ae^x+2x}{5}\quad y''=\frac{3ae^x+2}{5}$$

$$z'=\frac{2ae^x-2x}{5};\quad z''=\frac{2ae^x-2}{5}$$

Составляем $A$, $B$ и $C$:

$$A = z''y' - y''z' = \frac{(2ae^x-2)(3ae^x+2x)-(3ae^x+2)(2ae^x-2x)}{25}$$

$$B = x''z' - z''x' = -z'' = \frac{2ae^x-2}{5}$$

$$C = y''x - x''y' = y'' = \frac{3ae^x+2}{5}$$

Главная нормаль определится из ур-ний:

$$\left.\begin{aligned} &\left[(2ae^x-2)(3ae^x+2x)-(3ae^x+2)(2ae^x-2x)\right](X-x)+10(ae^x-1)(Y-y)+ \\ &\qquad + 5(3ae^x+2)(Z-z)=0 \\ &\text{и} \\ &(X-x)\,dx + (Y-y)\,dy + (Z-z)\,dz = 0 \end{aligned}\right\}$$

Ур-ие касательной получим, подставляя значения в общее ур-ие:

$$\frac{X-x}{\left(\frac{dx}{dt}\right)} = \frac{Y-y}{\left(\frac{dy}{dt}\right)} = \frac{Z-z}{\left(\frac{dz}{dt}\right)}$$

что дает

$$\frac{X-x}{5} = \frac{Y-y}{3ae^x+2x} = \frac{Z-z}{2ae^x-2x}$$

20. $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 2x+2y^2$ ; $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 4xy$ ; $\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 2z$

Ур-ие касательной плоскости:

$$(2x+2y^2)(X-x)+4xy(Y-y)+2z(Z-z)=0$$

Из условия ∥-сти

$$\frac{2x+2y}{1} = \frac{4xy}{-1} = \frac{2z}{2}$$

или

$$2x+2y^2 = -4xy = z$$

Значит

$$(X-x)-(Y-y)+2(Z-z)=0$$

Пересечение поверхности с осью OZ будет при $z = \pm 1$ $(x=y$

Значит имеем:

$$X-Y+2(Z\pm 1)=0$$

$$\rho = \frac{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$x' = 3t^2 \quad | \quad y' = 2t \quad | \quad z' = 3t^2+2 \quad | \quad \text{при } t=0 \quad x'=y'=x''=z''=0$$
$$x'' = 6t \quad | \quad y'' = 2 \quad | \quad z'' = 6t$$

$$A = y'z'' - z'y'' = -4$$
$$B = z'x'' - x'z'' = 0 \qquad\qquad \rho = \frac{4^{3/2}}{\sqrt{16}} = \frac{8}{4} = 2$$
$$C = x'y'' - y'x'' = 0$$

Уравнение касательной плоскости:

$$\frac{x}{a^2}(X-x) + \frac{y}{b^2}(Y-y) + \frac{z}{c^2}(Z-z) = 0 \quad \ldots (\mathrm{I})$$

Из условия ||-сти плоскостей

$$\frac{x}{a^2} = \frac{y}{b^2} = \frac{z}{c^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{II})$$

При помощи равенств (II) ур-ие (I) примет вид:

$$X+Y+Z = x+y+z$$

Написав же ур-ие (I) в виде:

$$\frac{xX}{a^2} + \frac{yY}{b^2} + \frac{zZ}{c^2} = 1$$

и принимая во внимание равенства (II), получим

$$\frac{X}{a^2} = \frac{1}{X+Y+Z} = \frac{1}{x+y+z} \quad \ldots (\mathrm{III})$$

По известному свойству отношений:

$$\frac{x+y+z}{a^2+b^2+c^2} = \frac{x}{a^2}$$

отсюда

$$\frac{x+y+z}{a^2+b^2+c^2} = \frac{1}{x+y+z}$$

или

$$x+y+z = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

Подставляя в рав. (III), получим

$$X = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \text{ и аналогично } Y = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}; \; Z = \frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

13. а) Покажем, что пов. $x^2+y^2+z^2=b$ и $xy=az^2$ пересекаются под прямым углом. Берем на линии пересечения точку $(x,y,z)$ и восставляем ⊥-ры в ней к обеим поверхностям.

Ур-ие нормали:

$$\frac{X-x}{\frac{\partial F}{\partial x}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial F}{\partial y}}=\frac{Z-z}{\frac{\partial F}{\partial z}} \quad \ldots\ldots \quad (*)$$

Угол между двумя направлениями:

$$\cos\theta=\cos\alpha\cdot\cos\alpha_1+\cos\beta\cdot\cos\beta_1+\cos\gamma\cdot\cos\gamma_1$$

Cos'ы углов прямой с осями координат пропорциональны знаменателям в (*). Значит

$$\cos\alpha=c\cdot\frac{\partial F}{\partial x}=c2x\ ;\ \cos\beta=c\cdot 2y\ ;\ \cos\gamma=c\cdot 2z$$

$$\cos\alpha_1=cy\ ;\quad \cos\beta_1=cy\quad ;\ \cos\gamma_1=-2azc$$

$$\cos\theta=2xy+2xy-4z^2=0\ ,\ \text{т.к.}\ a^2=xy$$

$$\text{т.е.}\ \theta=90^\circ$$

б) Покажем, что $z^2+2x^2=c(z^2+2y^2)$ и $xy=az^2$ пересекаются под углом в 90°. Переписываем 1ое ур-ие так.

$$(1-c)z^2+2x^2-2cy^2=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=4x\ ;\ \frac{\partial f}{\partial y}=-4cy\ ;\ \frac{\partial f}{\partial z}=2(1-c)z\ ;\ \frac{\partial \varphi}{dx}=y\ ;\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}=x\ ;\ \frac{\partial \varphi}{\partial z}=-$$

$$\cos\theta=4xy-4cyx-2(1-c)z\cdot 2az=4xy-4cxy-4az^2+4acz^2$$

т.к. $az^2=xy$. Значит $\theta=90^\circ$

24. Данная линия есть пересечение двух поверхностей:

$$f(x,y,z)=\quad x^2-\tfrac{1}{2}y\quad \text{и}\quad \varphi(x,y,z)=z-y$$

Обозначив через $F(x,y,z)$ искомую поверхность, получим из условия, что она проходит через данную кривую:

$$F(x,y,z)=f(x,y,z)+\lambda\,\varphi(x,y,z)$$

откуда

$$\lambda=-\frac{f(x,y,z)}{\varphi(x,y,z)}=-\frac{x^2-\frac{1}{2}y}{z-y}$$

Чтобы поверхность проходила через $M(1,-1,1)$, полагаем:

$x=1$ ; $y=-1$ ; $z=1$ ; тогда

$$\lambda=-\frac{1+\frac{1}{2}}{2}=-\frac{3}{4}$$

$$F(x,y,z)=x^2-\frac{1}{2}y-\frac{3}{4}z+\frac{3}{4}y=0$$

и

$$x+\frac{1}{4}y-\frac{3}{4}z=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2x\ ;\quad \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{1}{4}\ ;\quad \frac{\partial F}{\partial z}=-\frac{3}{4}$$

равнение касательной плоскости:

$$2x(X-x)+\frac{1}{4}(Y-y)-\frac{3}{4}(Z-z)=0$$

Т.к. поверхность проходит через прямую

$$x-3z=0 \quad \text{и} \quad y-5z=b\ ,$$

то они должны иметь общие координаты. Чтобы найти $a$, берем проекцию поверхностей (I) на плоскость $XZ$, т.е. $y=0$ ;: $x-z=2$ ; $x^2-z^2=1$ ;

$$x-z=2\ ;\ x^2-z^2=1$$

$x=\frac{5}{4}$ ; $z=-\frac{3}{4}$ ; отсюда $a=\frac{7}{2}$ ; $b=5$ ;

Ур-ие поверхности

$$F=x+y-z-2+\lambda(x^2+y^2-z^2-1)=0$$

$$\lambda=-\frac{x+y-z-2}{x^2+y^2-z^2-1}=-\frac{3z+\frac{7}{2}+5z+5-2-z}{(3z+\frac{7}{2})^2+(5z+5)^2-z^2-1}=$$

(подставляя $z=-\frac{3}{4}$) $\qquad =\frac{11}{8}$

Окончательно ур-ие поверхности:

$$11x^2+11y^2-11z^2+8x+8y-8z-27=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=22x+8\ ;\ \frac{\partial F}{\partial y}=22y+8\ ;\ \frac{\partial F}{\partial z}=22y-8$$

Ур-ие касательной плоскости:

$$(22x+8)(X-x)+(22y+8)(Y-y)-(8-22y)(Z-z)=0$$

$$y'=(x+1)^2(3x-2)^2+2(3x-2)(x+1)^3=5x(x+1)^2(3x-2)$$

$y'=0$ при $x=-1$; $x=\frac{2}{3}$ и $x=0$

Знак $y'$ зависит от выражения $x(3x-2)$, т.е. $y'>0$ вне значений $0$ и $\frac{2}{3}$ и $<0$ внутри этих корней.

Мы рассмотрим значения функции в интервалах $-\infty..0$, $0..\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}...+\infty$.

В 1ом интервале функция возрастает ($y'>0$),
во 2ом " " убывает ($y'<0$)
и в 3ем " " возрастает снова ($y'=0$)

При $x=0$ имеем max., при $x=\frac{2}{3}$ minimum; при $x=-\infty$, $y=$[illegible]

Составляем таблицу:

| $x$ | $y'$ | $y$ | |
|---|---|---|---|
| $-\infty$ | | $-\infty$ | |
| | + | | растет |
| $0$ | | $\frac{4}{3}$ | maximum |
| | − | | убывает |
| $\frac{2}{3}$ | | $0$ | minimum |
| | + | | растет |
| $+\infty$ | | $+\infty$ | |

в точке $(-1,0)$ перегиб

Кривая см. черт. 31

Черт. 31.

27. Функция вещественна, если подрадикальное выражение $>0$, т.е. если $x$ находится между $(-1)$ и $0$ или $>1$

При $x=-1$ и $x=0$, $y=\infty$;
при $x=\infty$, $y=0$

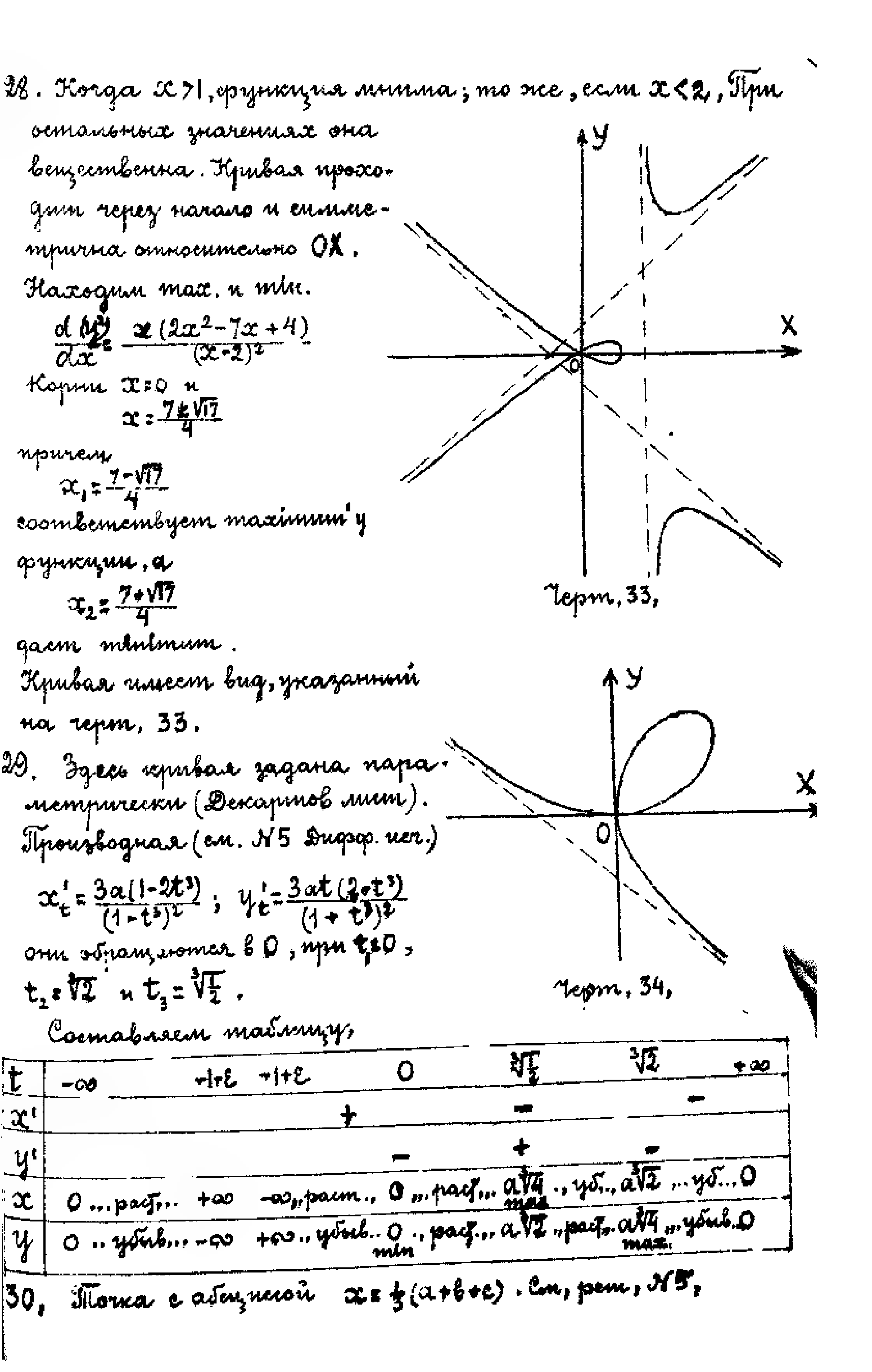
$$y'=\frac{1}{2\sqrt{\frac{x+1}{x(x+1)}}}\cdot\frac{-x^2+2x+1}{x^2(x+1)^2}$$

Корни: 1) $1-\sqrt{2}$ и 2) $1+\sqrt{2}$

Результат представим таблицей:

| $x$ | $-1$ | | $1-\sqrt{2}$ | | $0$ | $1$ | | $1+\sqrt{2}$ | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | − | | + | | | + | | − | |
| $y$ | миним. $+\infty$ | уб. | $\sqrt{2}+1$ min | возр. | $+\infty$ | $0$ | возр. | $\sqrt{2}-1$ max | уб. | $0$ |

Черт. 32.



28. Когда $x>1$, функция мнима; то же, если $x<2$. При остальных значениях она вещественна. Кривая проходит через начало и симметрична относительно OX.

Находим max. и min.

$$\frac{d(y^2)}{dx} = \frac{x(2x^2-7x+4)}{(x-2)^2}$$

Корни $x=0$ и

$$x=\frac{7\pm\sqrt{17}}{4}$$

причем

$$x_1=\frac{7-\sqrt{17}}{4}$$

соответствует maximum'у функции, а

$$x_2=\frac{7+\sqrt{17}}{4}$$

дает minimum.

Кривая имеет вид, указанный на черт, 33.



Черт, 33,

29. Здесь кривая задана параметрически (Декартов лист). Производная (см. N5 Дифф. исч.)

$$x'_t=\frac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}\ ;\ y'_t=\frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2}$$

они обращаются в 0, при $t=0$, $t_2=\sqrt[3]{2}$ и $t_3=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$.



Черт, 34,

Составляем таблицу,

| | |
|---|---|
| $t$ | $-\infty$ … $-1-\varepsilon$ $-1+\varepsilon$ … $0$ … $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ … $\sqrt[3]{2}$ … $+\infty$ |
| $x'$ | + … − … − |
| $y'$ | − … + … − |
| $x$ | 0 … раст… $+\infty$ $-\infty$,, раст.., 0 ,, раст… $a\sqrt[3]{4}$ (max) ., уб.., $a\sqrt[3]{2}$ …уб…0 |
| $y$ | 0 .. убыв… $-\infty$ $+\infty$ .. убыв.. 0 (min) ., раст.,, $a\sqrt[3]{2}$ ,,раст,, $a\sqrt[3]{4}$ (max) ,,убыв.0 |

30, Точка с абсциссой $x=\frac{1}{3}(a+b+c)$. См, реш, N5,

# Интегрирование функций. *)

## I. Непосредственное интегрирование.

1. Подстановка $ax+b=y$; $dx=dy:a$

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a}\int y^n dy = \frac{1}{a}\cdot\frac{y^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{a}\cdot\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}$$

2. Подстановка $ax=y$; $dx=\frac{dy}{a}$

$$\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}\int e^y dy = \frac{1}{a}e^y = \frac{1}{a}e^{ax}$$

3. Подстановка $ax=y$; $dx=\frac{dy}{a}$

$$\int \cos ax\, dx = \frac{1}{a}\int \cos y\, dy = \frac{1}{a}\sin y = \frac{1}{a}\cdot\sin ax$$

4. Подстановка $x^2 \pm a^2 = y$; $xdx = \frac{dy}{2}$

$$\int \frac{xdx}{x^2 \pm a^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y} = \frac{1}{2}\log y = \frac{1}{2}\log(x^2+a^2)$$

5. Подстановка $x=ay$; $dx=ady$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \arcsin y = \arcsin\frac{x}{a}$$

6. Подстановка $a^2-x^2=y^2$; $xdx=-ydy$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\int \frac{ydy}{y} = -y = -\sqrt{a^2-x^2}$$

7. $\int \frac{dx}{3x^2+5} = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{\left(\frac{3x^2}{5}\right)+1} = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{\left(\sqrt{\frac{3}{5}}x\right)^2+1} = J$. Полагая $\sqrt{\frac{3}{5}}x=y$, имеем $dx=\sqrt{\frac{5}{3}}dy$;

$$J = \frac{1}{5}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\int \frac{dy}{y^2+1} = \frac{1}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg} y = \frac{1}{15}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}x\right)$$

---

*) Постоянные в ответах опущены.

1. $\int\frac{xdx}{3x^2-7}=\frac{1}{6}\int\frac{d(3x^2)}{3x^2-7}=\frac{1}{6}\log(3x^2-7)$

) $\int\frac{dx}{\sqrt{4-5x^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{1-\frac{5}{4}x^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{1-(\frac{\sqrt5}{2})^2x^2}}=J$

Полагаем $\frac{\sqrt5}{2}x=y$ ; $dx=\frac{2}{\sqrt5}dy$

$J=\frac{1}{\sqrt5}\int\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\frac{1}{\sqrt5}\arcsin y=\frac{1}{\sqrt5}\arcsin\left(\frac{\sqrt5}{2}x\right)$

0. Подстановка $9-4x^2=y^2$ ; $xdx=-\frac{1}{4}ydy$

$\int\frac{xdx}{\sqrt{9-4x^2}}=-\frac{1}{4}\int\frac{ydy}{y}=-\frac{1}{4}y=-\frac{1}{4}\sqrt{9-4x^2}$

11. $\int\frac{(mx+n)dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=m\int\frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}+n\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=$ (см. прим. 5 и 6) $=$

$=-m\sqrt{a^2-x^2}+n\arcsin\frac{x}{a}$.

12. $\int\frac{\sin x\,dx}{\cos x}=-\int\frac{d(\cos x)}{\cos x}=-\log\cos x$

13. $\int\frac{\cos x\,dx}{\sin x}=\int\frac{d\sin x}{\sin x}=\log\sin x$

14. $\int\sin^2x\,dx=\int\frac{(1-\cos2x)dx}{2}=\frac{1}{2}\int(1-\cos2x)dx=\frac{1}{2}\left[\int dx-\frac{1}{2}\int\cos2x\,d(2x)\right]=$

$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin2x$

15. $\int\cos^2x\,dx=\int\frac{(1+\cos2x)dx}{2}=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin2x$

16. $\int\operatorname{tg}^2x\,dx=\int\frac{\sin^2x\,dx}{\cos^2x}=\int\frac{(1-\cos^2x)dx}{\cos^2x}=\int\frac{dx}{\cos^2x}-\int dx=\operatorname{tg}x-x$

17. $\int\operatorname{ctg}^2x\,dx=\int\frac{\cos^2x\,dx}{\sin^2x}=\int\frac{(1-\sin^2x)dx}{\sin^2x}=-\operatorname{ctg}x-x$

18. $\int\frac{dx}{\sin x\cos x}=\int\frac{(\sin^2x+\cos^2x)dx}{\sin x\cdot\cos x}=\int\operatorname{tg}x\,dx+\int\operatorname{ctg}x\,dx=$ (см. зад. 12 и 13)

$=-\log\cos x+\log\sin x=\lg\operatorname{tg}x$

19. $\int\frac{dx}{\sin x}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}=\int\frac{d(\frac{x}{2})}{\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}=$ (см. прим. 18) $=\log\operatorname{tg}\frac{x}{2}$

20 $\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{dx}{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})}=\int\frac{d(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})}{\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})}=$

$= (см. прим. 19) = -\lg \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) = \log \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$

21. Подстановка $\sqrt{x^2 \pm a^2} = z - x$

$$x^2 \pm a^2 = z^2 - 2xz + x^2$$

Дифференцируя

$$0 = z\,dz - x\,dz - z\,dx \; ; \; dx = \frac{(z-x)\,dz}{z} \text{ отсюда}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \int \frac{(z-x)\,dz}{(z-x)\,z} = \int \frac{dz}{z} = \log z = \log(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) \,.$$

22. $\int \frac{(1 + x\sqrt{x})}{x\sqrt[3]{x}} = \int (x^{-\frac{4}{3}} + x^{-2})\,dx = \int x^{-\frac{4}{3}}dx + \int x^{-2}dx = \frac{x^{-\frac{4}{3}+1}}{1-\frac{4}{3}} + \frac{x^{-2}}{-2+}$

23. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \int \frac{dx}{(x-a)(x+a)} = \frac{1}{2a}\int \frac{2a\,dx}{(x+a)(x-a)} = \frac{1}{2a}\int \frac{(x+a)-(x-a)}{(x-a)(x+a)}dx =$

$$= \frac{1}{2a}\left[\int \frac{dx}{x+a} - \int \frac{dx}{x-a}\right] = \frac{1}{2a}\log\frac{x+a}{x-a}$$

24. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)\,dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x$

25. $\int \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)dx = \int dx - \int x\,dx + \frac{1}{2}\int x^2 dx - \frac{1}{3}\int x^3 dx =$

$$= x - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{2.3} - \frac{x^4}{3.4}$$

26. Подстановка $x - a = y$, $dx = dy$

$$\int \frac{dx}{(x-a)^2} = \int \frac{dy}{y^2} = \int y^{-2}dy = \frac{y^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x-a}$$

27. Аналогично прим. 23.

$$\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{b-a}\int \frac{(x-a)-(x-b)}{(x-a)(x-b)}\,dx = \frac{1}{b-a}\left[\int \frac{dx}{x-b} - \int \frac{dx}{x-a}\right] =$$

$$= \frac{1}{b-a}\cdot\log\frac{x-b}{x-a}$$

## II. Интегрирование по частям.

Формула $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

1. $\log x = u$ ; $dv = dx$

тогда $\int \lg x\,dx = x\lg x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x\lg x - x.$

2. $\arcsin x = u$ ; $dv = dx$

$$\int \arcsin x\,dx = x\arcsin x - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = (\text{см. прим. } 6) = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$$

3. $\operatorname{arctg} x = u$ $dv = dx$

$$\int \operatorname{arctg} x\,dx = x\operatorname{arctg} x - \int \frac{x\,dx}{1+x^2} = (\text{см. прим. } 4) = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\lg(1+x^2)$$

4. $x = u$ ; $e^x dx = dv$ ; $v = \int e^x dx = e^x$

$$\int x e^x dx = xe^x - e^x$$

5. $x = u$ ; $\cos x\,dx = dv$ ; $v = \int \cos x\,dx = +\sin x$

$$\int x\cos x\,dx = x\sin x + \cos x$$

6. $\lg x = u$ ; $x\,dx = dv$ ; $du = \frac{dx}{x}$ ; $v = \int x\,dx = \frac{x^2}{2}$

$$\int x\lg x\,dx = \frac{1}{2}x^2\lg x - \frac{1}{2}\int x^2\frac{dx}{x} = \frac{1}{2}x^2\lg x - \frac{1}{4}x^2$$

7.
8. } Обозначим $J_1 = \int e^{ax}\cos bx\,dx$ и $J_2 = \int e^{ax}\sin bx\,dx$

Кроме того, для 1-го интеграла $e^{ax} = u$ ; $\cos bx\,dx = dv$

$$du = ae^{ax}dx \;;\; v = \int \cos bx\,dx = \frac{1}{b}\sin bx$$

Таким образом

$$J_1 = \frac{e^{ax}\sin bx}{b} - \int \frac{\sin bx \cdot e^{ax} \cdot a\,dx}{b} = \frac{e^{ax}\sin bx}{b} - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx\,dx$$

$$= \frac{e^{ax}\sin bx}{b} - \frac{a}{b}J_2 \quad \ldots\ldots (I)$$

Для 2-го интеграла полагаем $e^{ax} = u$ ; $\sin bx \cdot dx = dv$

$$du = e^{ax}a\,dx \;;\; v = \int \sin bx \cdot dx = -\frac{\cos bx}{b}$$

Тогда $$J_2 = \frac{-e^{ax}\cos bx}{b} + \frac{a}{b}J_1 \quad \ldots (II)$$

Из ур-ий (I) и (II) находим

$$J_1 = \frac{e^{ax}(b\sin bx + a\cos bx)}{a^2+b^2}.$$

$$J_2 = \frac{e^{ax}(a\sin bx + b\cos bx)}{a^2+b^2}$$

9. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{x \cdot x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = J$. Полагаем $x = u$ ; $\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = dv$

$$v=\int\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=(\text{см. прим. 6})=-\sqrt{a^2-x^2}$$

$$J=-x\sqrt{a^2-x^2}+\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

но $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int\frac{(a^2-x^2)dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}-\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=a^2\arcsin\frac{x}{a}-J$

Значит

$$J=-x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a}-J$$

откуда

$$J=-\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}$$

10. См. прим. 9.

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=a^2\arcsin\frac{x}{a}-\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}=$$

$$=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}$$

## III. Интегрирование рациональных дробей.

1. Разложение на простейшие дает

$$\frac{x}{x^3+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{Px+Q}{x^2-x+1}$$

$$x=A(x^2-x+1)+(Px+Q)(x+1)=x^2(A+P)+x(-A+P+Q)+(A+Q)$$

Сравнивая коэффициенты обеих частей получим:

| | | |
|---|---|---|
| $0=A+P$ | $P=-A$ | $A=-\frac{1}{3}$ |
| $1=-A+P+Q$ | $Q=-A$ | $P=Q=\frac{1}{3}$ |
| $0=A+Q$ | $1=-3A$ | |

Следовательно

$$\int\frac{x\,dx}{x^3+1}=-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{1}{3}\int\frac{(x+1)dx}{x^2-x+1}=-\frac{1}{3}\log(x+1)+\frac{1}{3}J$$

Последний интеграл запишем так:

$$J=\int\frac{(x-\frac{1}{2})+\frac{3}{2}}{x^2-x+1}dx=\int\frac{(x-\frac{1}{2})dx}{x^2-x+1}+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x^2-x+1}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2-x+1)}{x^2-x+1}+$$

$$+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}\log(x^2-x+1)+\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}\int\frac{dx}{\left[\frac{2(x-\frac{1}{2})}{\sqrt{3}}\right]^2+1}$$

Для оставшегося интеграла полагаем:

$$\frac{2x-1}{\sqrt{3}}=y\ ;\ \frac{2}{\sqrt{3}}dx=dy\ ;\ dx=\frac{\sqrt{3}}{2}dy$$

Тогда интеграл обращается в такой

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\int\frac{dy}{y^2+1}=\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{arctg}\,y=\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$$

Следовательно,

$$J=\frac{1}{2}\lg(x^2-x+1)+\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$$

и $\int\frac{x\,dx}{x^3+1}=-\frac{1}{3}\lg(x+1)+\frac{1}{6}\lg(x^2-x+1)+\frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$

$$\frac{2x+1}{(x-1)^3(x+1)(x^2+x+1)}=\frac{A_1}{(x-1)^3}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{A_3}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Px+Q}{x^2+x+1}$$

$$2x+1=A_1(x+1)(x^2+x+1)+A_2(x-1)(x^2+x+1)(x+1)+A_3(x-1)^2(x+1)(x^2+x+1)+$$
$$+B(x-1)^3(x^2+x+1)+(Px+Q)(x-1)^3(x+1)\ \ldots\ldots\ldots\ldots(*)$$

Полагая в этом тождестве $x=1$, найдем

$$3=6A_1\quad \text{и}\quad A_1=\frac{1}{2}$$

Полагая же $x=-1$, получим

$$-1=8B\ ,\ B=-\frac{1}{8}$$
$$2=3(Q-2P)\ ;\ -3(P+Q)=1$$
$$P=-\frac{1}{3}\ ;\ Q=0$$

Дифференцируем тождество $(*)$

$$2=A_1(x^2+x+1)+A_1=(x+1)(2x+1)+A_2(x+1)(x^2+x+1)+(x-1)\varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ некоторая целая функция.

Полагая $x=1$, найдем

$$2=3A_1+6A_1+6A_2\ ;\ A_2=\frac{1}{3}-\frac{3}{2}A_1=\frac{1}{3}-\frac{3}{4}=-5/12$$

Коэффициент $A_3$ найдется из уравнения коэффициентов при $x^3$ первоначального тождества:

$$0=A_3+B_1+P\quad ;\ A_3=B_1-P=-\frac{1}{8}+\frac{1}{3}=\frac{5}{24}$$

Отсюда имеем

$$\int\frac{(2x+1)dx}{(x-1)^3(x+1)(x^2+x+1)}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x-1)^3}-\frac{5}{12}\int\frac{dx}{(x-1)^2}+\frac{5}{24}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{1}{8}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{3}\int\frac{x\,d}{x^2+x}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{(x-1)^{-2}}{-2}-\frac{5}{12}\cdot\frac{(x-1)^{-1}}{-1}+\frac{5}{24}\lg(x-1)+\frac{1}{8}\lg(x+1)-\frac{1}{3}\int\frac{x\,dx}{x^2+x+1}$$

Для последнего интеграла применим способ, указанный в примере 1-ом

$$\int\frac{x\,dx}{x^2+x+1}=\int\frac{(x+\frac{1}{2})\,dx}{x^2+x+1}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1}-$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\int\frac{dx}{\left[\frac{2(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{3}}\right]+1}=\frac{1}{2}\lg(x^2+x+1)-\frac{2}{3}\int\frac{dx}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$$

Пусть $\frac{2x+1}{\sqrt{3}}=y$, тогда $\frac{2}{\sqrt{3}}dx=dy$ и

$$\int\frac{dx}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}=\frac{\sqrt{3}}{2}\int\frac{dy}{y^2+1}=\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

3. Подстановка $x^2+a=y$; $x\,dx=\frac{dy}{2}$

$$\int\frac{x\,dx}{(x^2+a)^n}=\frac{1}{2}\int\frac{dy}{y^n}=\begin{cases}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(n-1)y^{n-1}} & \text{при } n>1\\ =\frac{1}{2}\lg y & \text{при } n=1\end{cases}$$

4. $$\frac{2x+1}{(x-1)^2(x+1)(x^2+x+1)^2}=\frac{A_1}{(x-1)^2}+\frac{A_2}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{P_1x+Q_1}{(x^2+x+1)^2}+\frac{P_2x+Q_2}{x^2+x+1}$$

$$2x+1=A_1(x+1)(x^2+x+1)^2+A_2(x-1)(x+1)(x^2+x+1)+B(x-1)^2(x^2+x+1)^2+$$
$$+(P_1x+Q_1)(x-1)^2(x+1)+(P_2x+Q_2)(x-1)^2(x+1)(x^2+x+1)$$

При $x=1$, $2x+1=A_1\cdot 18$; $A_1=\frac{1}{6}$

" $x=-1$, $-1=B.4$, $B=-\frac{1}{4}$

Полагаем, наконец, $x=\alpha$, где $\alpha$ корень ур-ия $\alpha^2+\alpha+1=0$ ...(*)

$$2\alpha+1=(P\alpha+Q)(\alpha-1)^2(\alpha+1)=(\alpha^3-\alpha^2-\alpha+1)(P_1\alpha+Q_1)$$

Из (*) имеем $-\alpha^2=\alpha+1$; $\alpha^3=-\alpha^2-\alpha=1$

Отсюда следует

$$2x+1=(P_1\alpha+Q_1)3\ ;\ P_1=\frac{2}{3};\ Q=\frac{1}{3}$$

Чтобы найти $A_2$ дифференцируем основное тождество

$$2=A_1(x^2+x+1)^2+A_1(x+1)2(x^2+x+1)(2x+1)+A_2(x+1)2(x^2+x+1)(2x+1)+$$
$$+A_2(x+1)(x^2+x+1)^2+(x-1)\varphi(x)$$

При $x=1$, $2=9A_1+36A_1+18A_2$

то есть $A_2=\frac{2-45A_1}{18}=\frac{2-\frac{15}{2}}{18}=-\frac{11}{36}$

Чтобы найти $P_2$, сравниваем коэффициенты при $x$ в на-

чальном тождестве

$$0 = A_2 + B_1 + B_2 \;;\; B_2 = \frac{11}{36} + \frac{1}{4} = \frac{5}{9}$$

Для нахождения $Q_2$ сравниваем свободные члены

$$1 = A_1 - A_2 + B + Q_1 + Q_2 \;;\; Q_2 = 1 - \frac{1}{6} - \frac{11}{36} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$$

Теперь имеем:

$$\int \frac{(2x+1)\,dx}{(x-1)^2(x+1)(x^2+x+x)^3} = \int \frac{dx}{(x-1)^2} - \frac{11}{36}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{3}\int \frac{(2x+1)dx}{(x^2+x+1)^2} +$$

$$+ \frac{1}{9}\int \frac{(5x+4)dx}{x^2+x+1} = -\frac{1}{x-1} - \frac{11}{36}\lg(x-1) - \frac{1}{4}\lg(x+1) + \frac{1}{3}J_1 + \frac{1}{9}J_2$$

$$J_1 = \int \frac{(2x+1)dx}{(x^2+x+1)^2} = \int \frac{d(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \frac{-1}{x^2+x+1}$$

$J_2 = \int \frac{(5x+4)dx}{x^2+x+1}$ ; делаем подстановку $x + \frac{1}{2} = y$ ; $dx = dy$

$$J_2 = \int \frac{(5y+\frac{3}{4})dy}{y^2+\frac{3}{4}} = 5\int \frac{y\,dy}{y^2+\frac{3}{4}} + \frac{3}{2}\int \frac{dy}{y^2+\frac{3}{4}} = \frac{5}{2}\int \frac{d(y^2+\frac{3}{4})}{y^2+\frac{3}{4}} + \frac{3}{2}\int \frac{dy}{y^2+\frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{5}{2}\lg\left(y^2+\frac{3}{4}\right) + \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2y}{\sqrt{3}} = \frac{5}{2}\lg(x^2+x+1) + \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

. Подстановка $x - y = 1$ дает $x^2+1 = 2 + 2y + y^2$ ; $dx = dy$

$$\int \frac{(x^2+1)dx}{(x-1)^8} = \int \frac{2+2y+y^2}{y^8}dy = 2\int \frac{dy}{y^8} - 2\int \frac{y\,dy}{y^8} + \int \frac{dy}{y^6} =$$

$$= -\frac{2}{7}y^{-7} + \frac{1}{3}y^{-6} - \frac{1}{5}y^{-5}.$$ (Остается выразить $y$ через $x$)

$$.\int \frac{dx}{(x-1)^3(x+1)^4} = \int \frac{\frac{dx}{(x+1)^7}}{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3} = J$$

Подстановка $y = \frac{x-1}{x+1} = \frac{x+1-2}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}$ дает

$$dy = \frac{2}{(x+1)^2}dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (*)$$

$$\left(\frac{2}{x+1}\right)^5 = (1-y)^5 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (**)$$

Перемножаем $(*)$ на $(**)$, получим

$$\frac{dy}{(x+1)^7} = \frac{(1-y)^5\,dy}{64}$$

Следовательно

$$J = \frac{1}{64}\int\frac{(1-y)^5dy}{y^3} = \frac{1}{64}\int\frac{1}{y^3}(1-5y+10y^2-10y^3+5y^4-y^5)dy =$$
$$= \frac{1}{64}\left(-\frac{1}{2y^2}+\frac{5}{y}+10\lg y-10y+5y^2+\frac{1}{3}y^3\right)$$

Остается выразить $y$ через $x$. Эту задачу можно было бы решить и разложением на простейшие, но ход вычислений был бы значительно более длинный.

7. $$\int\frac{x^8dx}{(x^4-1)^3} = \int x^5\frac{x^3dx}{(x^4-1)^3} = \frac{1}{4}\int x^5\frac{d(x^4-1)}{(x^4-1)^3} = \frac{1}{4}\int x^5 d\left(-\frac{1}{2(x^4-1)^2}\right) =$$
$$= -\frac{1}{8}\int x^5 d\left[\frac{1}{(x^4-1)^2}\right] = J.$$

Теперь интегрируем по частям

$$J = -\frac{1}{8}\cdot\frac{x^5}{(x^4-1)^2}+\frac{5}{8}\int\frac{x^4dx}{(x^4-1)^2}$$

Последний интеграл преобразуем так:

$$\int\frac{x\cdot x^3dx}{(x^4-1)^2} = \frac{1}{4}\int\frac{x\,d(x^4-1)}{(x^4-1)^2} = -\frac{1}{4}\int x\,d\left(\frac{1}{x^4-1}\right) = (\text{интегр. по частям}) =$$
$$= -\frac{1}{4}x\cdot\frac{1}{x^4-1}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^4-1} = -\frac{x}{4(x^4-1)}+\frac{1}{4.2}\int\frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{(x^2+1)(x^2-1)}dx =$$
$$= -\frac{x}{4(x^4-1)}+\frac{1}{8}\int\frac{dx}{x^2-1}-\frac{1}{8}\int\frac{dx}{x^2+1} = -\frac{x}{4(x^4-1)}+\frac{1}{16}\lg\frac{x-1}{x+1}-\frac{1}{8}\operatorname{arctg}x.$$

8. $J = \int\frac{x\,dx}{x^4-x^2+1}+\int\frac{dx}{x^4-x^2+1}$ Подстановка $x^2=y$ обращает первый интеграл в $\frac{1}{2}\int\frac{dy}{y^2-y+1} = \frac{1}{2}\int\frac{d(y-\frac{1}{2})}{(y-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x^2-1}{\sqrt{3}}$.

Во втором интеграле разлагаем на простейшие, имея в виду, что

$$x^4-x^2-1 = x^4+2x^2+1-3x^2 = (x^2+1)^2-(x\sqrt{3})^2 = (x^2+x\sqrt{3}+1)(x^2-x\sqrt{3}+1)$$

тогда

$$\frac{1}{x^4-x^2+1} = \frac{Px+Q}{x^2+x\sqrt{3}+1}+\frac{P_1x+Q_1}{x^2-x\sqrt{3}+1}$$

или

$$1 = (Px+Q)(x^2-x\sqrt{3}+1)+(P_1x_1+Q_1)(x^2+x\sqrt{3}+1) =$$
$$= (P+P_1)x^3+(-P\sqrt{3}+P_1\sqrt{3}+Q+Q_1)x^2+(P+P_1-Q\sqrt{3}+Q_1\sqrt{3})x+(Q+$$

Отсюда имеем: $P+P_1=0$; $-P\sqrt{3}+P_1\sqrt{3}+Q+Q_1=0$; $P+P_1-Q\sqrt{3}+Q\sqrt{3}=0$ (

4) $Q+Q=1$

Из $1^{го}$ и $3^{го}$ равенств найдем $Q_1-Q=0$, решая это последнее с $4^{ым}$, получим $Q=Q_1=\frac{1}{2}$. Точно также найдем, что $=\frac{1}{2\sqrt{3}}$; $P_1=-\frac{1}{2\sqrt{3}}$.

Следовательно $1^{ый}$ из двух интегралов, к которому приводится $\int\frac{dx}{x^4-x^2-1}$ будет

$$\frac{1}{2\sqrt{3}}\int\frac{x+\sqrt{3}}{x^2+x\sqrt{3}+1}dx=\frac{1}{2\sqrt{3}}\int\frac{x+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}{(x+\frac{\sqrt{3}}{2})^2+\frac{1}{4}}dx=\frac{1}{2\sqrt{3}}\left[\int\frac{(x+\frac{\sqrt{3}}{2})dx}{(x+\frac{\sqrt{3}}{2})^2+\frac{1}{4}}+\right.$$

$$\left.+\frac{\sqrt{3}}{2}\int\frac{d(x+\frac{\sqrt{3}}{2})}{(x+\frac{\sqrt{3}}{2})^2+\frac{1}{4}}\right.=\frac{1}{4\sqrt{3}}\lg(x^2+x\sqrt{3}+1)+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2x+\sqrt{3})$$

Второй же интеграл получится из $1^{го}$, если в нем заменить $\sqrt{3}$ на $(-\sqrt{3})$; поэтому он равен

$$-\frac{1}{4\sqrt{3}}\lg(x^2-x\sqrt{3}+1)+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2x-\sqrt{3})$$

. Подстановка $y=x+\frac{1}{x}$ даст

$$dy=(1-\frac{1}{x^2})dx=\frac{x^2-1}{x^2}dx;\quad dx=\frac{x^2dy}{x^2-1}$$

$$\int\frac{1+x^4}{1-x^6}dx=\int\frac{1+x^4}{1-x^6}\cdot\frac{x^2dy}{x^2-1}=-\int\frac{(1+x^4)x^2dy}{(x^4-2x^2+1)(x^4+x^2+1)}=$$

$$=-\int\frac{x^2(x^2+\frac{1}{x^2})x^2dy}{x^2(x^2+\frac{1}{x^2}-2)x^2(x^2+\frac{1}{x^2}+1)}=\int\frac{(y^2-2)dy}{(y^2-4)(y^2-1)}$$

Далее разлагаем так:

$$\frac{y^2-2}{(y^2-4)(y^2-1)}=\frac{A}{y^2-1}+\frac{B}{y^2-4}\quad\text{или}\quad y^2-2=A(y^2-4)+B(y^2-1)$$

откуда $A+B=1$; $4A+B=2$; $A=\frac{1}{3}$; $B=\frac{2}{3}$

Интеграл обращается в следующий:

$$-\int\frac{\frac{1}{3}(y^2-4)+\frac{2}{3}(y^2-1)}{(y^2-4)(y^2-1)}dy=-\frac{1}{3}\int\frac{dy}{y^2-1}-\frac{2}{3}\int\frac{dy}{y^2-4}=$$

$$=-\frac{1}{6}\lg\frac{y-1}{y+1}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\lg\frac{y-2}{y+2}=-\frac{1}{6}\left(\lg\frac{y-1}{y+1}+\lg\frac{y-2}{y+2}\right)=$$

$$=-\frac{1}{6}\log\frac{y^2-3y+2}{y^2+3y+2}$$ (Остаётся выразить $y$ через $x$)

10. Подстановка $y = x + \frac{1}{x}$ дает

$$dy = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)dx = \frac{x^2+1}{x^2}dx\ ;\ dx = \frac{x^2 dy}{x^2+1}$$

Интеграл примет вид

$$\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\cdot\frac{x^2dy}{x^2+1} = \int\frac{dy}{x^2+\frac{1}{x^2}} = \int\frac{dy}{y^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{y}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}\right)$$

Замечание. Эту же задачу можно разрешить разложением на простейшие

$$\frac{x^2+1}{x^4+1} = \frac{x^2+1}{x^4+1+2x^2-2x^2} = \frac{Px+Q}{x^2+x\sqrt{2}+1} + \frac{P_1x+Q_1}{x^2-x\sqrt{2}+1}$$

По освобождении от знаменателей найдем, что

$$P + P_1 = 0 \qquad -Q + Q_1 = 0$$

Давая $x$ значения корня ур-ия $x^2+x\sqrt{2}+1=0$, т.е. $x=\alpha$, найдем

$$\alpha^2 - \alpha\sqrt{2} + 1 = 0 \quad \text{или} \quad \alpha^2 = \alpha\sqrt{2} - 1$$

Отсюда

$$\alpha^2+1 = (P\alpha+Q)0 + (P_1\alpha+Q_1)(\alpha^2+\alpha\sqrt{2}+1)$$

но $\alpha^2+1 = \alpha\sqrt{2}$, стало быть

$$\alpha\sqrt{2} = (P_1\alpha+Q_1)(\alpha\sqrt{2}+1+\alpha\sqrt{2}-1)$$

или $\quad 1 = 2P_1\alpha + 2Q_1\ ;\ P_1 = 0\ ;\ Q = \frac{1}{2}$

Таким образом получим:

$$\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+x\sqrt{2}+1} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-x\sqrt{2}+1}$$

Подстановка для первого интеграла $x + \frac{\sqrt{2}}{2} = z$ а для второго $x - \frac{\sqrt{2}}{2} = z$ приведет к найденному уже выше результату, но весь ход решения является более длинным.

1. Формула выделения алгебраической части

$$\int\frac{f(x)\,dx}{F(x)} = \frac{\varphi(x)}{D(x)} + \int\frac{\psi(x)\,dx}{Q(x)}$$

где $D(x)$ общий наиб. делитель $F(x)$ и $F'(x)$ ; $Q(x)$ = частному $\frac{F(x)}{D(x)}$ ; $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ функции степени на единицу ниже $Q(x)$ и $D(x)$.

В нашем примере

$$D(x) = (x-1)(x^2+1)$$

$Q(x) = (x-1)(x^2+1)$; следовательно $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ будут 2<sup></sup>ой степени : $\varphi(x) = ax^2+bx+c$ ; $\psi(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

Мы получим:

$$\int \frac{x^2-x+1}{(x-1)^2(x^2+1)^2}dx = \frac{ax^2+bx+c}{(x-1)(x^2+1)} + \int \frac{\alpha x^2+\beta x+\gamma}{(x-1)(x^2+1)}dx$$

Дифференцируя найдем:

$$\frac{x^2-x+1}{(x-1)^2(x^2+1)^2} = \frac{(x-1)(x^2+1)(2ax+b)-(ax^2+bx+c)(3x^2-2x+1)}{(x-1)^2(x^2+1)^2} +$$

$$+\frac{\alpha x^2+\beta x+\gamma}{(x-1)^2(x^2+1)^2}$$ Отсюда

$$x^2-x+1 = (x^3-x^2+x-1)(2ax+b)-(ax^2+bx+c)(3x^2-2x+1) +$$
$$+(x^3-x^2+x-1)$$

равнивая коэффициенты, получим:

$\alpha = 0$ ; $2a-3a+\beta = 0$, т.е. $a = \beta$

$\beta x^2 - 2ax^2 = 0$ ; $-3b+2a = -\beta+\gamma$ ; $\gamma-\beta = 2b$ ;

$-b+2a-a+2b-3c+\beta-\gamma = 1$ ; $\alpha+\beta+\gamma-3c = 1$ ;

$-2a+b-b+2c-\beta+\gamma = -1$, $-2a+2c-\beta+\gamma-3c = 1$

$-b-c-\gamma = 1$ ; $b+c+\gamma = 1$ ; откуда $\beta = 0$ ; $\gamma = -\frac{1}{2}$ ; $\alpha = 0$ ; $b = \frac{1}{4}$

начит

$$\int \frac{x^2-x+1}{(x-1)^2(x^2+1)^2}dx = -\frac{1}{4}\cdot\frac{x+1}{(x-1)(x^2+1)} - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x-1)(x^2+1)}$$

Последний интеграл находится так:

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Px+Q}{x^2+1}$$ или $1 = A(x^2+1)+B(x-1)$

Полагая $x=1$, находим $A = \frac{1}{2}$ ; полагая же $x = i$, найдем

$1 = Pi^2+(Q-P)i-Q = -(Q+P)+(Q-P)i$, отсюда ясно, что

$Q-P = 0$, $-(Q+P) = 1$, т.е. $Q = P = -\frac{1}{2}$ ; следовательно

$$\int\frac{dx}{(x-1)(x^2+1)} = -\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int\frac{(x+1)dx}{x^2+1} = -\frac{1}{2}lg(x-1) - \frac{1}{4}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1} - \int\frac{dx}{x^2+1}$$

$$= -\frac{1}{2}\lg(x-1) - \frac{1}{4}\lg(x^2+1) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$$

2. Выделяем прежде всего целую часть

$$\frac{x^2+6x+5}{x^2-6x+5} = 1 + \frac{12x+10}{x^2-6x-5}$$

Следовательно

$$\int \frac{x^2+6x+5}{x^2-6x+5}\,dx = x + 12\int\frac{x\,dx}{x^2-6x-5} + 10\int\frac{dx}{x^2-6x+5} = x + 12J_1 + 1$$

Для $J_1$ подстановка $x^2-3=y^2$; $x\,dx = y\,dy$

$$J_1 = \int\frac{y\,dy}{y^2-14} = \frac{1}{2}\int\frac{dy^2}{y^2-14} = \frac{1}{2}\log(y^2-14)$$

Для второго интеграла разлагаем на простейшие

$$\frac{1}{x^2-6x+5} = \frac{A}{x-(3+\sqrt{14})} + \frac{B}{x-(3-\sqrt{14})}\ ;\ A[x-(3+\sqrt{14})] + B[x-(3-\sqrt{14})]$$

Полагая $x = 3-\sqrt{14}$, а затем $x = 3+\sqrt{14}$, найдем, что $A = \frac{1}{2\sqrt{14}}$; $B=-$;

$$\int\frac{dx}{x^2-6x+5} = \frac{1}{2\sqrt{14}}\int\frac{dx}{x-(3+\sqrt{14})} - \frac{1}{2\sqrt{14}}\int\frac{dx}{x-(3-\sqrt{14})} = \frac{1}{2\sqrt{14}}\lg\left(\frac{x-3+\sqrt{14}}{x-3-\sqrt{14}}\right)$$

13. Вместо разложения на простейшие, проще решить так:

$$\int\frac{dx}{x^3(x-1)^2} = \int\frac{\frac{dx}{x^5}}{\left(\frac{x-1}{x}\right)^2} = J.$$ Подстановка $\frac{x-1}{x} = y$ даёт $1-\frac{1}{x} = y$; $\frac{dx}{x^2} = d$

$$J = \int\frac{\frac{x^2dy}{x^5}}{y^2} = \int\frac{dy}{x^3y^2} = \int\frac{dy}{\frac{1}{(y-1)^3}y^2} = \int\frac{(1-y)^3dy}{y^2} = \int\frac{(1-3y+3y^2-y^3)\,dy}{y^2} =$$

$$= \int\frac{dy}{y^2} - 3\int\frac{dy}{y} + 3\int dy - \int y\,dy = -\frac{1}{y} - 3\lg y + 3y - \frac{y^2}{2}$$

14. Разложением на простейшие и интегрируя находим

$$J = \frac{1}{4}\log\frac{(x-1)^3}{(x-1)(x+1)} - \operatorname{arctg} x$$

15. $$\int\frac{dx}{(x^2+a)^2} = \frac{1}{a}\int\frac{(x^2+a)-x^2}{(x^2+a)^2}\,dx = \frac{1}{a}\left[\int\frac{dx}{x^2+a} - \int\frac{x^2dx}{(x^2+a)^2}\right] = \frac{1}{a}(J_1+J_2)$$

$$J_1 = \frac{\sqrt{a}}{a}\int\frac{\frac{dx}{\sqrt{a}}}{\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)^2+1} = \frac{\sqrt{a}}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{a}}\ ;\ J_2 = (\text{см. прим. } 3^{\text{ий}}) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+a}$$

16. $$\frac{4x^2-6x+1}{2x^3-x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-\frac{1}{2}}\ ;\ 4x^2-6x+1 = A(2x^2-x) + B(2x-1) + C(x-$$

Полагая $x=0$ и $x=-\frac{1}{2}$, найдем: $2A+2C=4$; $2B-A=-6$; $-B=1$ т.е. $A=4$, $B=-1$ и $C=-2$. Тогда искомый интеграл

$$J=4\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dx}{x^2}-2\int\frac{dx}{x-2}=4\lg x+\frac{1}{x}-2\lg\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

7. $$\frac{x^4+1}{(x^3-1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}+\frac{Ex+F}{(x^2+x+1)^2}$$

Сравнение коэффициентов обеих частей, по освобождении от знаменателей, дает $A=0$, $B=\frac{2}{9}$, $C=0$, $D=\frac{7}{9}$, $E=\frac{1}{3}$ и $F=0$

$$J=\frac{2}{9}\int\frac{dx}{(x-1)^2}+\frac{7}{9}\int\frac{dx}{x^2+x+1}+\frac{1}{3}\int\frac{x\,dx}{(x^2+x+1)^2}$$

Первый интеграл $=-\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{x-1}$; знаменатель во втором инт-ле $x^2+x+1=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$ и мы полагаем $x+\frac{1}{2}=\sqrt{\frac{3}{4}}\,y$, тогда

$$\frac{7}{9}\int\frac{dx}{x^2+x+1}=\frac{7}{9}\sqrt{\frac{4}{3}}\int\frac{dy}{y^2+1}=\frac{14\sqrt{3}}{27}\operatorname{arctg} y$$

В последнем интеграле, имея в виду, что $x=\frac{1}{2}(2x+1)-\frac{1}{2}$, мы получим

$$\frac{1}{3}\int\frac{x\,dx}{(x^2+x+1)^2}=\frac{1}{6}\left[\int\frac{(2x+1)dx}{(x^2+x+1)^2}-\int\frac{dx}{(x^2+x+1)^2}\right]=-\frac{1}{6}(x^2+x+1)^{-1}-\frac{1}{6}J.$$

Для вычисления $J$ поступим так: возьмем дифференциал от $\frac{t}{t^2+1}$;

$$d\left(\frac{t}{t^2+1}\right)=\frac{dt}{t^2+1}-\frac{2t^2dt}{(t^2+1)^2}=-\frac{dt}{t^2+1}+\frac{2\,dt}{(t^2+1)^2}\text{; интегрируя}$$

получим

$$\frac{t}{t^2+1}=-\operatorname{arctg} t+2\int\frac{dt}{(t^2+1)^2}\text{; отсюда}$$

$$\int\frac{dt}{(t^2+1)^2}=\frac{\operatorname{arctg} t}{2}-\frac{t}{2(t^2+1)}$$

причем $t$ определяется из равенства $x+\frac{1}{2}=\sqrt{\frac{3}{4}}\,t$. Окончательно

$$\int\frac{x^4+1}{(x^3-1)^2}dx=-\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{9}\cdot\frac{x+2}{x^2+x+1}+\frac{4\sqrt{3}}{9}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

## IV. Интегрирование иррациональных функций.

1. Подстановка $2x+1=z^2$; $dx=dz$; $x=\frac{z^2-1}{2}$.

$$J=\int\frac{z\,dz}{\frac{z^2-1}{2}-z}=2\int\frac{z\,dz}{z^2-2z-1}=2\int\frac{[(z-1)+1]dz}{(z-1)^2-2}=\log(z^2-2z+1)+\frac{2}{2\sqrt{2}}\log\frac{z-1-\sqrt{2}}{z+1+\sqrt{2}}$$

2. Подстановка $x = z^4$, $dx = 4z^3dz$

$$J = \int \frac{z \cdot z^3 dz}{z^2-1} = 4\int \frac{z^4 dz}{z^2-1} = 4\int \frac{(z^4-1)+1}{z^2-1} dz = 4\left\{\frac{1}{3}z^3 + z + \log\frac{z-1}{z+1}\right\}$$

3. $$J = \int \frac{\frac{dx}{(x+1)^2}}{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2/3}}$$ Полагаем $\frac{x-1}{x+1} = z^3 = \frac{x+1-2}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}$ откуда

$$\frac{2dx}{(x+1)^2} = 3z^2dz$$

Тогда $J = \frac{3}{2}\int \frac{z^2dz}{z^2} = \frac{3}{2}z = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}$

4. По формуле $\int \frac{\omega_n(x)dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}} = \sqrt{Ax^2+Bx+C}\ \varphi_{n-1}(x) + \lambda\int\frac{dx}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}}$

$$J = \sqrt{x^2-2x+2}\,(\alpha_0x^2+\alpha_1x+\alpha_2) + \lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-2x-2}}$$

Дифференцируя находим

$$\frac{x^3-x^2+1}{\sqrt{x^2-2x+2}} = \frac{(x-1)(\alpha_0x^2+\alpha_1x+\alpha_2)}{\sqrt{x^2-2x+2}} + \sqrt{x^2-2x+2}\,(2\alpha_0x+\alpha_1) + \lambda\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$$

или

$$x^3-x^2-1 = (x-1)(\alpha_0x^2+\alpha_1x+\alpha_2) + (x^2-2x+2)(2\alpha_0+\alpha_1) + \lambda$$

Отсюда имеем

$1 = \alpha_0 + 2\alpha_0$ ; $\alpha_0 = \frac{1}{3}$ ; $-1 = \alpha_1 - \alpha_0 + \alpha_1 - 4\alpha_0$ ; $\alpha_1 = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}\alpha_0 = \frac{1}{3}$

$0 = \alpha_2 - \alpha_1 - 2\alpha_1 + 4\alpha_0$ ; $\alpha_2 = 3\alpha_1 - 4\alpha_0 = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}$ ; $1 = -\alpha_2 + 2\alpha_1 + \lambda$ ;

$\lambda = 1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = 0$. Следовательно

$$J = \frac{1}{3}(x^2+x-1)\sqrt{x^2-2x+2}$$

5. $$J = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d\left(x-\frac{3}{4}\right)}{\sqrt{\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{5}{2}-\frac{9}{16}}}$$ Полагаем $z = x - \frac{3}{4}$

$$J = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dz}{\sqrt{z^2-\frac{31}{16}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\log\left(z+\sqrt{z^2+\frac{31}{16}}\right)$$

6. $$\int\frac{dx}{\sqrt{3-x-2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}x-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d\left(x+\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{\frac{3}{2}+\frac{1}{16}-\left(x^2-\frac{1}{2}x+16\right)}} = $$ (подстановк $x+\frac{1}{4} = z$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dz}{\sqrt{\frac{25}{16}-z^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(-\frac{4z}{5}\right)$$

Замечание к примерам 5 и 6.

Пример 5 может быть решен также с помощью 1ой подстановки Эйлера, полагая $\sqrt{2x^2-3x+5} = z - x\sqrt{2}$.

Пример 6 может быть решен 2ой подстановкой Эйлера (т.к. коэффициент при $x^2 < 0$, а $c > 0$

$\sqrt{3-x-2x^2} = \sqrt{-(2x^2+x-3)} = \sqrt{-2(x-1)(x+\frac{3}{2})} = z(x-1)$ с тем же результатом.

. Подстановка $x + \frac{1}{2} = z$ дает: $J = \int \frac{dz}{(z^2+\frac{3}{4})\sqrt{2z^2-\frac{7}{2}}} = \int \frac{z^{-3}dz}{(1+\frac{3}{4}z^{-2})\sqrt{2-\frac{7}{2}z^{-2}}}$

Полагаем $2 - \frac{7}{2}z^{-2} = t^2$; $\frac{7}{2}z^{-3}dz = tdt$; $1 + \frac{3}{4}z^{-2} = 1 + \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{7}(-t^2+2) =$
$= \frac{1}{14}(20-3t^2)$

$$J = \frac{2}{7}\cdot 14 \int \frac{tdt}{t(20-3t^2)} = 4\int \frac{dt}{20-3t^2} = \frac{4}{2\sqrt{20}\sqrt{3}} \log \frac{\sqrt{20}+t\sqrt{3}}{\sqrt{20}-t\sqrt{3}}$$

1ая подстановка Эйлера дает $\sqrt{x^2+2x+3} = z - x$; $2x+3 = z^2 - 2zx$

$$dx = \frac{(z-x)dz}{1+z}; \quad J = \int \frac{(z-x)dz}{(1+z)(z-x)} = \int \frac{dz}{1+z} = \log(1+z)$$

Подстановка $x = \frac{1}{y}$; $dx = -\frac{dy}{y^2}$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{2x-3x^2}} = -\int \frac{dy}{y^2\cdot\frac{1}{y^2}\sqrt{\frac{2}{y}-\frac{3}{y^2}}} = -\int \frac{ydy}{\sqrt{2y-3}} = J$$

Подстановка $2y-3 = z^2$; $dy = zdz$; $y = \frac{z^2+3}{2}$ дает

$$J = -\frac{1}{2}\int \frac{(z^2+3)zdz}{z} = -\frac{1}{2}\int (z^2+3)dz = -\frac{1}{2}\cdot\frac{z^3}{3} - \frac{3}{2}z = -\frac{1}{6}\sqrt{(2y-3)^3} -$$
$$-\frac{3}{2}\sqrt{2y-3} = -\frac{1}{6}\sqrt{\left(\frac{2-3x}{x}\right)^3} - \frac{3}{2}\sqrt{\frac{2-3x}{x}}.$$

Другой способ. Полагаем $\sqrt{2x-3x^2} = \sqrt{x(2-3x)} = z(2-3x)$ (3я подстановка Эйлера). Тогда

$$z = \frac{\sqrt{x(2-3x)}}{2-3x} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2-3x}} \text{ или } z^2 = \frac{x}{2-3x}; \text{ отсюда } x = \frac{2z^2}{3z^2+1}$$
и $dx = \frac{2(2-3x)zdz}{3z^2+1}$

$$J = 2\int \frac{(2-3x)z.dz}{(3z^2+1)\cdot\frac{4z^4}{(3z^2+1)^2}\cdot z\cdot(2-3x)} = \frac{1}{2}\int \frac{(3z^2+1)dz}{z^4} =$$
$$= \frac{3}{2}\int \frac{dz}{z^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^4} = -\frac{3}{2z} - \frac{1}{6z^3} = -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2-3x}{x}} - \frac{2-3x}{6x}\sqrt{\frac{2-3x}{x}}$$

10. Подстановка $1+x=\frac{1}{y}$; $dx=-\frac{dy}{y^2}$; $J=\int\frac{dy}{y^2\cdot\frac{1}{y}\cdot\frac{\sqrt{y^2-y-1}}{y}}=-\int\frac{dy}{\sqrt{y^2-y-1}}$

Новая подстановка $\sqrt{y^2-y-1}=z-y$ дает $-y-1=z^2-2zy$; $dy=\frac{2(z-y)dz}{2z-1}$

$$J=-2\int\frac{(z-y)dz}{(2z-1)(z-y)}=-\int\frac{d(2z-1)}{2z-1}=-\log(2z-1)=-\log(y+\sqrt{y^2-y-1}-1)=$$

$$=\log\left(\frac{1}{x+1}+\sqrt{\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{1+x}-1}-1\right)=\log\frac{3+x-2\sqrt{1-x-x^2}}{1+x}$$

11. Подстановка $x^4=y$; $4x^3dx=dy$; $J=\frac{1}{4}\int\frac{dy}{\sqrt{1+y^2}}$

Новая подстановка $\sqrt{1+y^2}=z-y$; $1=z^2-2yz$; $dy=\frac{(z-y)dz}{z}$

$$J=\frac{1}{4}\int\frac{(z-y)dz}{z(z-y)}=\frac{1}{4}\int\frac{dz}{z}=\frac{1}{4}\log z=\frac{1}{4}\log(y+\sqrt{1+y^2})=\frac{1}{4}\lg(x^4+\sqrt{1+x^8})$$

12. К интегралам этого типа применима подстановка Абеля. Полагаем $\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)'_x=z$ или $z=\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}=\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{x^2+x+1}}$ или $z\sqrt{x^2+x+1}=x+\frac{1}{2}$. Дифференцируем это выражение

$\sqrt{x^2+x+1}\,dz+z\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)'_x dx=dx$ или $\sqrt{x^2+x+1}\,dz+z^2dx=dx$

Следовательно $\frac{dz}{1-z^2}=\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$

Подставляем в интеграл

$J=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}\,(x^2+x+1)^2}=\int\frac{dz}{(x^2+x+1)^2(1-z^2)}$ Надо еще выразить $(x^2+x+1)^2$ через $z$; имеем $z^2(x^2+x+1)=x^2+x+\frac{1}{4}=x^2+x+1-\frac{3}{4}$ или $(x^2+x+1)(1-z^2)=\frac{3}{4}$; $x^2+x+1=\frac{3}{4(1-z^2)}$. Следовательно

$$J=\int\frac{dz}{(1-z^2)\cdot\frac{9}{16(1-z^2)^2}}=\frac{16}{9}\int(1-z^2)dz=\frac{16}{9}\left(z-\frac{z^3}{3}\right)=\frac{16}{9}\left[\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}-\frac{1}{3}\cdot\frac{(2x+1)^3}{8\sqrt{(x^2+x+1)^3}}\right]$$

Замечание. Этот же интеграл можно проще найти при помощи следующих двух подстановок:

Полагаем сперва $x+\frac{1}{2}=z$; $dx=dz$

$J=\int\frac{dz}{(z+\frac{3}{4})^{\frac{5}{2}}}=\int\frac{z^{-5}dz}{(1+\frac{3}{4}z^{-2})^{\frac{5}{2}}}$. Теперь делаем подстановку $1+\frac{3}{4}z^{-2}=t^{-2}$

$\frac{3}{4}z^{-3}dz=t^{-3}dt$; $z^2=\frac{4}{3}(t^{-2}-1)$ и оконч-но

$J=\frac{16}{9}\int\frac{(t^2-1)t^{-3}dt}{t^5}=\frac{16}{9}\int(1-t^2)dt=\frac{16}{9}(t-\frac{1}{3}t^3)$. Остается подставить $t=\frac{z}{\sqrt{z^2+\frac{3}{4}}}=\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{x^2+x+1}}$ (Как видим обе подстановки дают в ре-

тате ту самую подстановку Абеля, которое пример решен первоначально.)

$=\int x^{-1}(a+bx^2)^{\frac{1}{2}}dx$ ; $\frac{m+1}{n}=\frac{-1+1}{n}=0$ ; подстановка $a+bx^2=z^2$

$=\left(\frac{z^2-a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}$ ; $dx=\frac{z\,dz}{bx}$ ; $J=\int\left(\frac{b}{z^2-a}\right)^{\frac{1}{2}}z\cdot\left(\frac{b}{z^2-a}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{dz}{b}=\int\frac{z\,dz}{z^2-a}=$

$=\frac{1}{2}\int\frac{d(z^2-a)}{z^2-a}=\frac{1}{2}\log(z^2-a)$

становка $1+x^3=z^4$; $3x^2dx=4z^3dz$ ; $\int\frac{\sqrt[4]{1+x^3}}{x}dx=\frac{4}{3}\int\frac{z^4dz}{z^4-1}=$

$\frac{4}{3}\left[z+\frac{1}{2}\int\frac{(z^2+1)-(z^2-1)}{(z^2+1)(z^2-1)}dz\right]=\frac{4}{3}\left[z+\frac{1}{4}\lg\frac{z-1}{z+1}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}z\right]$

$\frac{dx}{\sqrt[3]{2-x^3}}=\int\frac{x^{-1}dx}{\sqrt[3]{2x^{-3}-1}}=\int\frac{x^{-4}dx}{x^{-3}\sqrt[3]{2x^{-3}-1}}$ Подстановка $2x^{-3}-1=z^3$

$2x^{-4}dx=z^2dz$ ; $x^{-3}=\frac{z^3+1}{2}$

$=-\int\frac{\frac{1}{2}z^2dz}{\frac{1}{2}(z^3+1)z}=-\int\frac{z\,dz}{z^2+1}=-\frac{1}{2}\lg(z^2+1)$

$J=\int\frac{x^{-4}dx}{(2+3x^{-3})\sqrt[3]{4+5x^{-3}}}$ Подстановка $4+5x^{-3}=z^3$ дает

$x^{-4}dx=-\frac{1}{5}z^2dz$ ; $2+3x^{-3}=2+3\cdot\frac{z^3-4}{5}=\frac{3z^3-2}{5}$

$J=\int\frac{-\frac{1}{5}z^2dz}{\frac{3z^2-2}{5}\cdot z}=-\int\frac{z\,dz}{3z^2-2}$ (Остается разложить на простейшие, см. пример 1)

Подстановка $y=x+\frac{1}{x}$ ; $dy=(1-\frac{1}{x^2})dx$ ; $dx=\frac{x^2dy}{x^2-1}$

$=\int\frac{x-1}{x+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^4+1}}\cdot\frac{x^2dy}{x^2-1}=\int\frac{x}{x^2+2x+1}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^4+1}}dy=\int\frac{1}{x+2+\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}}dy=$

$=\int\frac{1}{y+2}\cdot\frac{dy}{\sqrt{y^2-2}}$ Новая подстановка $y+2=\frac{1}{z}$ дает

$dy=-\frac{dz}{z^2}$ ; $y^2-2=\frac{1}{z^2}-\frac{4}{z}+2=\frac{1}{z^2}(1-4z+2z^2)$ после чего имеем

$=-\int\frac{dz}{2z^2-4z+1}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\lg\left[2z-2+\sqrt{2}\sqrt{2z^2-4z+1}\right]$ (подстановкой

Эйлера, т.е. $\sqrt{2z^2-4z+1}=t-z\sqrt{2}$ ).

18. Подстановка $2+\sqrt{1+x}=y$; $dx=2\sqrt{1+x}\,dy=2(y-2)\,dy$

$x=(y^2-2)^2-1$

$J=2\int\frac{[(y^2-2)^2-1](y-2)\,dy}{y}$ который берется непосредственно.

Окончательный ответ: $J=\frac{2x+20}{3}\sqrt{1+x}-2(1+x)-12\lg(2+\sqrt{1+x})$

19. Подстановка: $a+bx^2=y$; $J=\frac{1}{6}\sqrt{a+bx^2}$

20. $J=3\int x^2(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}dx-2\int x^4(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}dx=3J_1-2J_2$

Для 1-го интеграла $\frac{m+1}{n}+p=\frac{2+1}{2}-\frac{3}{2}=0$ т.е. нужна подстановка $1-x^2=x^2z^2$ или $1=x^2(z^2+1)$; $x^2=\frac{1}{z^2+1}$. Далее имеем $-x\,dx=x^2z\,dz+z^2x\,dx$; $-(z^2+1)dx=xz\,dz$; $dx=\frac{-xz\,dz}{z^2+1}$

$J_1=-\int\frac{1}{z^2+1}\cdot x^{-3}z^{-3}\cdot\frac{xz\,dz}{z^2+1}=-\int\frac{(z^2+1)\,dz}{(z^2+1)^2z^2}=-\int\frac{dz}{z^2(z^2+1)}$ Остается разложить на простейшие.

Для $J_2$ – тот же прием, т.к. $\frac{m+1}{n}+p=\frac{4+1}{2}-\frac{3}{2}=1$ (целому)
Подстановка та же. Окончательный результат

$$J=\frac{x^3}{\sqrt{1-x^3}}$$

21. $\int\frac{dx}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=\int\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})}{2}dx=\frac{1}{2}\left[\int\sqrt{1+x}\,dx-\int\sqrt{1-x}\,dx\right]=$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{(1-x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}=\frac{1}{3}\sqrt{(1+x)^3}-\frac{1}{3}\sqrt{(1-x)^3}$$

## V. Интегрирование трансцендентных функций.

1. $\int e^{-x}(2x-1)\cos 3x\,dx=e^{-x}[\cos 3x(\alpha x+\beta)+\sin 3x(\gamma x+\delta)]$

Дифференцируя находим:

$e^{-x}(2x-1)\cos 3x=e^{-x}[-3\sin 3x(\alpha x+\beta)+\cos 3x\cdot\alpha+3\cos 3x(\gamma x+\delta)$
$+\sin 3x\cdot\gamma]-e^{-x}[\cos 3x(\alpha x+\beta)+\sin 3x(\gamma x+\delta)]=$
$=e^{-x}[-3\sin 3x(\alpha x+\beta)+\cos 3x\cdot\alpha+3\cos 3x(\gamma x+\delta)+\sin 3x\cdot\gamma-\cos 3x(\alpha x$
$-\sin 3x(\gamma x+\delta)]]$

По сокращении на $e^{-x}$ сравнение коэффиц-ов обеих частей.

$2=-\alpha+3\gamma$...(1)
$-1=-\beta+\alpha+3\delta$...(2)
$0=-\gamma-3\alpha$...(3)
$0=-\delta+\gamma-3\beta$...(4)

Из (1)-го и (3)-го: $\alpha=-0,2$; $\gamma=0,6$
из (2)-го и (4)-го: $\beta=0,26$; $\delta=-0,18$

$J=e^{-x}[(-0,2x+0,26)\cos 3x+(0,6x-0,18)\sin 3x]$

Подстановка $y=\operatorname{tg} x$; $J=\int\frac{\frac{2\,dy}{1+y^2}}{2+\frac{2y}{1+y^2}-4\frac{1-y^2}{1+y^2}}=2\int\frac{dy}{2+2y^2+2y-4+4y^2}=$

$=2\int\frac{dy}{6y^2+2y-2}=\int\frac{dy}{3y^2+y-1}=\frac{1}{3}\int\frac{dy}{y^2+\frac{1}{3}y-\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}\int\frac{dy}{(y+\frac{1}{6})^2-\frac{13}{36}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{\sqrt{13}}\lg\frac{y+\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{13}}{6}}{y+\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{13}}{6}}$

Проще всего: $x^2+1=u$; $dv=\cos 4x\,dx$; $du=2x\,dx$; $v=\int\cos 4x\,dx=\frac{\sin 4x}{4}$

$J=(x^2+1)\frac{\sin 4x}{4}-\frac{1}{2}\int x\sin 4x\,dx=(x^2+1)\frac{\sin 4x}{4}-\frac{1}{2}J_1$

В $J_1$ полагаем снова: $u=x$; $dv=\sin 4x\,dx$; $du=dx$; $v=-\frac{\cos 4x}{4}$

$J_1=-\frac{x\cos 4x}{4}+\frac{1}{4}\int\cos 4x\,dx=-\frac{x\cos 4x}{4}+\frac{1}{16}\sin 4x$; таким образом

$J=\sin 4x\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{7}{32}\right)+\cos 4x\cdot\frac{1}{8}x.$

Подстановка $\sin x=y$; $J=\int\frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}\cdot\cos x\,dx=\int\frac{y^4dy}{1-y^2}=\int\frac{1-(1-y^4)}{1-y^2}dy=$

$=\int\frac{dy}{1-y^2}-\int(1+y^2)dy=\frac{1}{2}\log\frac{1+y}{1-y}-y-\frac{1}{3}y^3$

Подстановка $y=\cos x$; $J=-\int(1-y^2)y^4dy=-\frac{1}{5}y^5+\frac{1}{7}y^7$

$J=\frac{1}{16}\int\sin^4 2x\cdot\cos^2 x\,dx$. По формуле Эйлера

$\sin^4 z=\left[\frac{e^{zi}-e^{-zi}}{2i}\right]^4=\frac{1}{2^4}\left[e^{4zi}-4e^{2zi}+6-e^{-4zi}-4e^{-2zi}\right]=\frac{1}{2^3}(\cos 4z-4\cos 2z+3)$

откуда $\sin^4 2x=\frac{1}{2^3}(\cos 8x-4\cos 4x+3)$; кроме того $\cos^2 x=\frac{1}{2}(\cos x+1)$

или $\sin^4 2x\cos^2 x=\frac{1}{2^4}\left[3-4\cos 4x+\cos 8x+3\cos 2x-2\cos 6x-2\cos 2x+\right.$
$\left.+\frac{1}{2}\cos 10x+\frac{1}{2}\cos 6x\right]=\frac{1}{2^4}\left(3+\cos 2x+4\cos 4x-\frac{3}{2}\cos 6x+\cos 8x+\frac{1}{2}\cos 10x\right)$

$J=\frac{1}{256}\left(3x+\frac{1}{2}\sin 2x-\sin 4x-\frac{1}{4}\sin 6x+\frac{1}{8}\sin 8x+\frac{1}{20}\sin 10x\right)$

вводим в числителе $\sin^2 x+\cos^2 x=1$

$=\int\frac{(\sin^2 x+\cos^2 x)\,dx}{\sin^3 x\cos^4 x}=\int\frac{dx}{\sin x\cos^4 x}+\int\frac{dx}{\sin^3 x\cos^2 x}=\int\frac{(\sin^2 x+\cos^2 x)dx}{\sin x\cdot\cos^4 x}+$

$+\int\frac{(\sin^2 x+\cos^2 x)dx}{\sin^3 x\cdot\cos^2 x}=\int\frac{\sin x\,dx}{\cos^4 x}+2\int\frac{dx}{\sin x\cos^2 x}+\int\frac{dx}{\sin^3 x}=-\int\frac{d(\cos x)}{\cos^4 x}+$

$$+2\int\frac{(\sin^2x+\cos^2x)dx}{\cos^3x\sin x}+\int\frac{(\sin^2x+\cos^2x)dx}{\sin^3x}=\frac{1}{3\cos^3x}+2\int\frac{\sin x\,dx}{\cos^2x}+$$

$$+2\int\frac{dx}{\sin x}+\int\frac{dx}{\sin x}+\int\frac{\cos^2x\,dx}{\sin^3x}$$ (см. пример 19 отд. I) =

$$=\frac{1}{3\cos^3x}+\frac{2}{\cos x}+3\lg\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\int\frac{\cos^2x\,dx}{\sin^3x}$$ Последний интеграл берется по частям.

$\cos x=u$; $dv=\frac{\cos x\,dx}{\sin^3x}$;

$$v=\int\frac{d(\sin x)}{\sin^3x}=-\frac{1}{2\sin^2x};\quad\int\frac{\cos^2x\,dx}{\sin^3x}=-\frac{\cos x}{2\sin^2x}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sin x}=$$

$$=-\frac{\cos x}{2\sin^2x}-\frac{1}{2}\lg\operatorname{tg}\frac{x}{2};\quad J=\frac{1}{3\cos^3x}+\frac{2}{\cos x}-\frac{\cos x}{2\sin^2x}+\frac{5}{2}\lg\operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

Замечание 1. $\int\frac{dx}{\sin x}$ может быть найден также подстановкой $y=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

Замечание 2. Введение в числитель множителя $\sin^2x+\cos^2x=1$ делается вообще, когда при отрицательных степенях $\sin x$ и $\cos x$, степени эти различной четности.

Подстановка $y=\operatorname{tg}x$. Деля на $\cos^3x$, получим

$$J=\int\frac{\operatorname{tg}x\,d\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}^3x+1}=\int\frac{y\,dy}{1+y^3}$$ (Остается разложить на простейшие)

Та же подстановка. Делим на $\cos^3x$. $J=\int\frac{\frac{dx}{\cos^2x}}{\operatorname{tg}x.\sec^2x-1}=\int\frac{d\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}^3x+\operatorname{tg}x+\dots}$

$$=\int\frac{dy}{y^3+y-2}$$. Остается разложить на простейшие (Знаменатель $=(y-1)(y^2+2)$

$$J=\int\left(\frac{1-\cos2x}{2}\right)^2dx=\frac{1}{4}\int(1-\cos2x)^2dx=\frac{1}{4}\int\left[1-2\cos2x+\cos^22x\right]dx=\frac{1}{4}\left[x-\int\cos2x\,dx\right.$$

$$\left.+\int\cos^22x\,dx\right]=\frac{1}{4}x-\frac{\sin2x}{4}+\frac{1}{4}\int\cos^22x\,dx;$$ но $\cos^22x=\frac{1+\cos4x}{2}$;

$$\int\frac{1+\cos4x}{2}dx=\frac{1}{8}\int(1+\cos4x)\,d4x=\frac{x}{2}+\frac{1}{8}\sin4x.$$ Итак

$$J=\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin2x+\frac{1}{32}\sin4x$$

$$J=2\int\frac{\sin x\cos x\,dx}{4\cos^3x-3\cos x}=-2\int\frac{d(\cos x)}{4\cos^2x-3}=-2\int\frac{dy}{4y^2-3}=-\frac{1}{2}\int\frac{dy}{\left(y+\sqrt{\frac{3}{4}}\right)\left(y-\sqrt{\frac{3}{4}}\right)}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt3}\log\frac{y+\frac{\sqrt3}{2}}{y-\frac{\sqrt3}{2}}=\frac{1}{2\sqrt3}\log\frac{2\cos x+\sqrt3}{2\cos x-\sqrt3}$$

2. $J=\int\frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\sec^2 x+1}=\int\frac{d\,tg\,x}{tg^2x+2}=\int\frac{dy}{y^2+2}=\frac{\sqrt2}{2}\int\frac{\frac{dy}{\sqrt2}}{\left(\frac{y}{\sqrt2}\right)^2+1}=\frac{1}{\sqrt2}\,arctg\left(\frac{y}{\sqrt2}\right)=\frac{1}{\sqrt2}\,arctg\left(\frac{tg\,x}{\sqrt2}\right.$

3. Подстановка $y=tg\frac{x}{2}$. Надо иметь в виду, что
$\sin x=\frac{2y}{1+y^2}$; $\cos x=\frac{1-y^2}{1+y^2}$; $dx=\frac{2dy}{1+y^2}$. Подставляя
теграл два последние выражения, мы получим:

$$J=\int\frac{dx}{\sqrt{\cos x-\cos^2x}}=2\int\frac{dy}{(1+y^2)\sqrt{\frac{1-y^2}{1+y^2}-\frac{(1-y^2)^2}{(1+y^2)^2}}}=2\int\frac{dy}{(1+y^2)\frac{\sqrt{1-y^4-1+2y^2-y^4}}{1+y^2}}=\frac{2}{\sqrt2}\int\frac{dy}{y\sqrt{1-y^2}}=$$

$$=(\text{подстан. } y=\tfrac{1}{z})=-\frac{2}{\sqrt2}\int\frac{dz}{\sqrt{z^2-1}}=-\sqrt2\,lg\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)=-\sqrt2\,lg\frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}=-\sqrt2\,lg\frac{1+\sqrt{1-tg^2\frac{x}{2}}}{tg\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{\sqrt2}{2}\,lg\frac{tg^2\frac{x}{2}}{\left(1+\sqrt{1-tg^2\frac{x}{2}}\right)^2}=\frac{\sqrt2}{2}\,lg\frac{tg^2\frac{x}{2}\left(1-\sqrt{1-tg^2\frac{x}{2}}\right)}{\left(1+\sqrt{1-tg^2\frac{x}{2}}\right)\left(1-\sqrt{1-tg^2\frac{x}{2}}\right)}=\frac{\sqrt2}{2}\,lg\frac{1-\sqrt{1-tg^2\frac{x}{2}}}{1+\sqrt{1+tg^2\frac{x}{2}}}$$

4. $J=e^{-2x}\left[a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3\right]$; дифференцируем:
$e^{-2x}(x^3-x+1)=-2e^{-2x}(a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3)+e^{-2x}(3a_0x^2+2a_1x+a_2)$
Сокращая на $e^{-2x}$ и приравнивая коэффициенты общих част

$$\left.\begin{array}{l}1=-2a_0\\0=-2a_1+3a_0\\-1=-2a_2+2a_1\\1=-2a_3+a_2\end{array}\right\}\begin{array}{l}a_0=-\frac{1}{2}\\a_1=\frac{3}{2}a_0=-\frac{3}{4}\\a_2=\frac{1}{2}+a_1=-\frac{1}{4}\\a_3=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a_2=-\frac{5}{8}\end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{l}1\\0\\1\\1\end{array}}\right\}J=-e^{-2x}\left(\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{4}x+\frac{5}{8}\right)$$

15. Подстановка $y=tg\,x$; отсюда $\sin x=y\cos x$;
$\sin^{\frac{2}{3}}x\cdot\cos^{\frac{4}{3}}x=y^{\frac{2}{3}}\cos^2x$
$$J=\int\frac{dx}{y^{\frac{2}{3}}\cos^2x}=\int\frac{dy}{y^{2/3}}=3\cdot\frac{1}{\sqrt{tg\,x}}$$

16. $y=e^x$; $J=\int\frac{dy}{y(y+1)}=\int\frac{(y+1)-y}{y(y+1)}\,dy=\int\frac{dy}{y}-\int\frac{dy}{y+1}=\log\frac{y}{y+1}=lg\frac{e^x}{e^x+1}$



# Таблица I.

## Формулы дифференциального исчисления.

| Функция | Ее производная | Функция | Ее производная |
|---|---|---|---|
| Постоянное . . . | . . . 0 | $\operatorname{tg} x$ . . . | $\frac{1}{\cos^2 x}$ |
| $x$ . . . | . . . 1 | $\operatorname{ctg} x$ . . . | $-\frac{1}{\sin^2 x}$ |
| $\frac{1}{x}$ . . . | . . . $-\frac{1}{x^2}$ | $\sec x$ . . . | $\sec x \cdot \operatorname{tg} x$ |
| $x^m$ . . . | . . . $mx^{m-1}$ | $\operatorname{cosec} x$ . . . | $-\operatorname{cosec} x \cdot \operatorname{ctg} x$ |
| $\sqrt{x}$ . . . | . . . $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $\arcsin x$ . . . | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $a^x$ . . . | . . . $a^x \lg a$ | $\operatorname{arc\,tg} x$ . . . | $\frac{1}{1+x^2}$ |
| $e^x$ . . . | . . . $e^x$ | $x^x$ . . . | $x^x(1+\lg x)$ |
| $\log x$ . . . | . . . $\frac{1}{x}$ | $(u+v+w)'$ . . . | $u'+v'+w'$ |
| $\sin x$ . . . | . . . $\cos x$ | $(uv)'$ . . . | $uv'+u'v$ |
| $\cos x$ . . . | . . . $-\sin x$ | $\left(\frac{u}{v}\right)'$ . . . | $\frac{vu'-uv'}{v^2}$ |

# Таблица II

## Наиболее часто встречающиеся интегралы*)

| Интеграл | Его значение | Способ получения. |
|---|---|---|
| $\int x^m dx$ . . . $m \neq -1$ | . . . $\frac{x^{m+1}}{m+1}$ | |
| $\int \cos x\,dx$ . . . | . . . $\sin x$ | |
| $\int \sin x\,dx$ . . . | . . . $-\cos x$ | |
| $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ . . . | . . . $\operatorname{tg} x$ | |
| $\int \frac{dx}{\sin^2 x}$ . . . | . . . $-\operatorname{ctg} x$ | |
| $\int a^x dx$ . . . | . . . $\frac{a^x}{\lg a}$ | |
| $\int e^x dx$ . . . | . . . $e^x$ | |
| $\int \frac{dx}{x}$ . . . | . . . $\lg x$ | |
| $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ . . . | . . . $\arcsin x$ | |
| $\int \frac{dx}{1+x^2}$ . . . | . . . $\operatorname{arc\,tg} x$ | |

*) Постоянные здесь опущены.

| Интеграл | Его значение | Способ получения |
| --- | --- | --- |
| $\int \log x\,dx$ | $x(\log x-1)$ | По частям: $\lg x = u$; |
| $\int \operatorname{tg} x\,dx$ | $-\log\cos x$ | $\int \frac{\sin x}{\cos x}dx = \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\lg$ |
| $\int \operatorname{ctg} x\,dx$ | $\log\sin x$ | $\int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \lg$ |
| $\int \sin^2 x\,dx$ | $\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x$ | Заменою $\sin^2 x$ на $\frac{1-\cos}{2}$ |
| $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx$ | $\operatorname{tg} x - x$ | Заменою $\sin^2 x$ на $1-\cos^2 x$ |
| $\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx$ | $-\operatorname{ctg} x - x$ | |
| $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$ | $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x$ | Умножая числитель на $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ |
| $\int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos x}$ | $\log\operatorname{tg} x$ | тоже. |
| $\int \frac{dx}{\sin x}$ | $\log\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ | На основании предыд. формулы ($\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}$) |
| $\int \frac{dx}{\cos x}$ | $\log\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$ | Заменою $\cos x$ на $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)$ и пред |
| $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ | $\arcsin\frac{x}{a}$ | Подстановка $x = ay$ |
| $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$ | $\log(x+\sqrt{x^2 \pm a^2}$ | Подстановка $\sqrt{x^2 \pm a^2} = z - x$ |
| $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ | $-\sqrt{a^2-x^2}$ | Подстановка $a^2-x^2=y^2$ |
| $\int \arcsin x\,dx$ | $x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$ | По частям и на основании предыд. формулы |
| $\int \operatorname{arctg} x\,dx$ | $x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\lg(1+x^2)$ | По частям |
| $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ | $\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}$ | $J = a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} - \int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ |
| $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ | $\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} - \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}$ | $J = \int\frac{x\cdot x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ (по частям) |
| $\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)}$ | $\frac{1}{a-b}\log\frac{x-a}{x-b}$ | Разложение на простейшие |

## Оглавление.

## Издания Ленинградского Политехникума Путей Сообщения имени тов. ДЗЕРЖИНСКОГО.

### Вышли из печати и поступили в продажу:

1. **И. С. Каннегиссер.** Конспект административно-хозяйственной организации железнодорожных мастерских. 29 стр. с 3 табл.
2. **А. В. Смирнов.** Метод аналитических координат при составлении плана угломерной с'емки. Записал студент Б. Леонтьев (литогр.). 22 стр.
3. Инженер **А. Н. Катикман,** проф. **С. Д. Карейша,** проф. **О'Рурк.** Краткая энциклопедия железнодорожного дела. 90 стр. с 135 черт.
4. Инженер **А. Н. Челюсткин.** Способы составления характеристик металлообрабатывающих станков. 84 стр. с 10 таблицами черт. (отдельно).
5. Инженер **А. К. Пассек.** Способы разработки тоннелей: австрийский, бельгийский, германский, английский «Надсводный разрез» и итальянский. Вып. I, стр. 50 с 131 черт. отдельным альбомом.
6. Инженер **В. С. Хальфин.** Использование вагонов и паровозов. Вып. I. Общие основания эксплоатации подвижного состава. 68 стр. 2 черт. диаграмм.
7. Инженер **В. С. Хальфин.** Вып. II. Использование паровозов 95 стр. с 19 черт.
8. Инженер **В. С. Хальфин.** Вып. III. Использование вагонов.
9. Проф. **В. С. Наумов.** Основы термодинамики (литогр.) 98 стр. (Распрод).
10. Инженер **Д. Г. Ананов.** Логарифмическая пластинка для технических вычислений Тип. III, 62 стр.
11. **И. Давидов.** Сборник задач по высшей математике (литогр).

### Находятся в печати.

1. Проф. **Гатцук** и инж. **Челюсткин.** Станки для обработки металлов (их конструкции, исследование и рациональн. эксплоатац.).
2. Проф. **В. С. Наумов.** Основы термодинамики. 2 литогр. издание.
3. Инженер **[illegible]. П. Риццони.** Производство железнодорожных мастерских.

---

### СКЛАД ИЗДАНИЙ

**Ленинград, Бородинская ул. д. 6. Телеф. 138-92 и 582-64.**